1 Ein bisschen Gruppentheorie

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Mengen bilden mit der jeweils angegebenen Verknüpfung + (Addition) oder · (Multiplikation) eine Gruppe?

a) $(\mathbb{R}, +)$: die reellen Zahlen mit der Verknüpfung +

b) $(\mathbb{N}, +)$: die natürlichen Zahlen mit +

c) $(\mathbb{Z}, \cdot)$: die ganzen Zahlen mit ·

Aufgabe 2:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ bilden die vier Punkte

$$A(1|0), \quad B(0|1), \quad C(-1|0), \quad D(0|-1)$$

ein Quadrat.
Es sei G die Menge der Drehungen der Ebene um den Punkt $(0|0)$, die dieses Quadrat auf sich abbilden.

a) Wieviele sind es?

b) Die Verknüpfung $\circ$ soll jetzt das Hintereinanderausführen von Drehungen sein, d.h.:

$d_1 \circ d_2 =$ Zuerst die Drehung d_2 ausführen und dann die Drehung d_1.

Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe?

c) Schreibe alle Verknüpfungen $d_1 \circ d_2$ in eine Tabelle.
Solch eine Tabelle nennt man in der Gruppentheorie *Verknüpfungstafel*.

d) Ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Felix Klein
1849 - 1925

Dr. G. Schmithüsen

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Mathematik

Aufgabe 3:
Es seien

- d_x die Raumdrehung um die x-Achse um 90°,
- d_y die Raumdrehung um die y-Achse um 90° und
- d_z die Raumdrehung um die z-Achse um 90°.

a) Betrachte die vier Drehungen d_x^2, d_y^2, d_z^2 und die Nulldrehung id. Wie sieht die Verknüpfungstafel für die Verknüpfung $\circ$ aus?

b) Ist $G := \{d_x^2, d_y^2, d_z^2, \mathrm{id}\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe?