Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. (Ebene)

(a) Wenn die Punkte A, B, C in E liegen, erfüllen ihre Koordinaten jeweils die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1$. Dies ergibt das folgende LGS

$$\begin{array}{rcl} -a_1 + a_2 + 2a_3 & = & 1 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 & = & 1 \\ 2a_1 - 2a_2 - a_3 & = & 1 \end{array}$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die zugehörige Matrix an und erhalten

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Daraus erhalten wir die Lösung: $a_3 = 1$, $a_2 = -4$, $a_1 = -3$ und die Gleichung von E: $-3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$

b) Die Punkte von g haben die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1+3t \\ -1+3t \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die Ebenengleichung erhalten wir

$$\begin{array}{rcr} -3(2-t) - 4(1+3t) + (-1+3t) & = & 1 \\ -6 + 3t - 4 - 12t - 1 + 3t & = & 1 \\ -6t & = & 12 \\ t & = & -2 \end{array}$$

und damit den Schnittpunkt $S(4, -5, -7)$.

c) Um die Ebene E in Parameterdarstellung anzugeben, nehmen wir A als Aufpunkt mit dem zugehörigen Ortsvektor

$$x_0 := \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und als Richtungsvektoren von E

$$\begin{aligned} u &:= \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ v &:= \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Schnittwinkel und Abstand)

(a) E_1 : Aus der Gleichung von E_1 lesen wir als Normalenvektor ab: $n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir normieren n_1 und erhalten den Normaleneinheitsvektor

$$u_1 = \frac{n_1}{\|n_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3+1}}\, n_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

E_2 : Wir stellen E_2 als Gleichung dar:

$$x \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3}s - t \\ 2\sqrt{3} + 2s \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}x_3, \quad s = \frac{1}{2}(x_2 - 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(x_2 - 2\sqrt{3}) - \frac{1}{2}x_3$$

Die Gleichung von E_2 lautet somit: $x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4$,

$$n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \|n_2\| = \sqrt{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$$

Damit ergibt sich für den Normalenvektor von E_2.

$$u_2 = \frac{n_2}{\|n_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \cos\measuredangle(E_1, E_2) &= \langle u_1, u_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}(0 \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1) \\ &= \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{also } \measuredangle(E_1, E_2) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(c) Zunächst beschreiben wir mit Hilfe von u_2 die Hessesche Normalform von E_2:

$$\langle u_2, x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_3 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Wir setzen die Koordinaten des Punktes P in diese Hessesche Normalform ein:

$$\begin{aligned} d(P,E_2) &= |\langle u_2, p\rangle - 2\sqrt{2}| = |\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0) - 2\sqrt{2}| \\ &= |\tfrac{5}{2\sqrt{2}} - \tfrac{8}{2\sqrt{2}}| = \tfrac{3}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (Drei Geraden)

Auch bei dieser Aufgabe ist eine Skizze (wie in der Vorlesung angegeben) zur Verdeutlichung und zum Verständnis hilfreich (vgl. Übung). Gegeben sind die Geraden

$$\begin{aligned} g_1: \ x &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \\ g_2: \ x &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

für die gesuchte Gerade g_3 machen wir den Ansatz

$$g_3: \ x = c + \nu w, \ \nu \in \mathbb{R}.$$

Der Richtungsvektor w muss auf den Richtungsvektoren von g_1 und g_2 senkrecht stehen, sodass wir zum Beispiel

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen können. Damit ist g_3 von der Form

$$g_3: \ x = c + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \nu \in \mathbb{R}$$

Wir wählen C mit dem Ortsvektor c als Schnitt der (Hilfs-)Ebene, die die Geraden g_1 und g_3 enthält,

$$E: \ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \nu \in \mathbb{R}.$$

mit der Geraden g_2. Wir lösen

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \lambda + 2\nu &= 5 + 2\mu & \qquad\qquad 4\nu &= 5 + \mu \\ -\lambda + 2\nu &= -\mu & \Leftrightarrow \quad -\lambda + 2\nu &= -\mu \\ \nu &= -1 - 2\mu & 0 &= 9 + 9\mu. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die zweite Zeile zur ersten addiert und dann von dem vierfachen der dritten Zeile das Ergebnis subtrahiert. Man erhält so $\mu = -1$, also mit

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Darstellung

$$g_3 : \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \nu \in \mathbb{R}.$$

Um den kürzesten Abstand der Geraden g_1 und g_2 zu bestimmen, brauchen wir einerseits

$$g_2 \cap g_3 = C \text{ mit } c = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und andererseits $Q := g_1 \cap g_3$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile dieses LGS kann man sofort $\nu = 2 - 3 = -1$ ablesen, d.h. $Q = Q(-1, 0, 2)$.

Der kürzeste Abstand der Geraden g_1 und g_2 ergibt sich somit zu

$$d_{min} = ||\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ}|| = || \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} || = || \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} || = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$