Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 5. (Orthonormalisierung)

Mit $v_1 = (1, 2, 0, -1)^T$ ergibt sich $||v_1|| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$ und damit

$$w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit $v_2 = (0, -1, 1, 2)^T$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-4}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit $||\tilde{w}_2|| = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 1 + 9 + 16} = \frac{1}{3}\sqrt{30}$ ist also

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{||\tilde{w}_2||} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Mit $v_3 = (1, 0, -1, 0)^T$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{w}_3 &= v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 27 \\ -9 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $||\tilde{w}_3|| = \frac{3}{10}\sqrt{9 + 1 + 9 + 1} = \frac{3\sqrt{20}}{10}$ ist

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{||\tilde{w}_3||} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $v_4 = (0,1,0,0)^T$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_4 &= v_4 - \langle v_4, w_1\rangle w_1 - \langle v_4, w_2\rangle w_2 - \langle v_4, w_3\rangle w_3 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad w_4 = \frac{\tilde{w}_4}{||\tilde{w}_4||} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da $||\tilde{w}_4|| = \frac{1}{4}\sqrt{1+1+1+1} = \frac{\sqrt{4}}{4}$.
Damit ist $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ das gesuchte Orthonormalsystem.

Aufgabe 6. (Legendrepolynome)

Seien $p_0, p_1, p_2, p_3 \in V$ mit $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, p_3(x) = x^3$. Dann ist $\|p_0\|^2 = \int_{-1}^1 1\, dx = 2$, also gilt

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Weiter gilt $\langle p_1, q_0\rangle = \int_{-1}^1 x/\sqrt{2}\, dx = 0$, daher ist $\tilde{q}_1 = p_1 - 0 \cdot q_0 = p_1$, und aus $\|\tilde{q}_1\|^2 = \int_{-1}^1 x^2\, dx = 2/3$ folgt

$$q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Wir haben

$$\langle p_2, q_0\rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^2\, dx = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \langle p_2, q_1\rangle = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x\, dx = 0.$$

Es folgt

$$\tilde{q}_2(x) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3},$$

also

$$\|\tilde{q}_2\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45},$$

und daher

$$q_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\langle p_3, q_0\rangle &= \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{2}}\, dx = 0, \quad \langle p_3, q_2\rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = 0, \\
\langle p_3, q_1\rangle &= \int_{-1}^1 x^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x\, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\tilde{q}_3(x) = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x = x^3 - \frac{3}{5} x,$$

also

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_3\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^6 - \frac{6}{5} x^4 + \frac{9}{25} x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{8}{175}, \end{aligned}$$

und daher

$$q_3(x) = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right).$$