Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 11. (Basis für Untervektorraum)

Die Vektoren q_1, q_2, q_3, q_4 sind Linearkombinationen der linear unabhängigen Vektoren p_1, p_2, p_3, p_4 mit $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^7$, $p_4(x) = x^{11}$. Ihre Koordinatenvektoren bezüglich dieser Basis sind

$$\hat{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}), \quad \hat{q}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad \hat{q}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen nun unter den Vektoren q_1, q_2, q_3, q_4 ein maximales linear unabhängiges Teilsystem. Dazu suchen wir unter den Koordinatenvektoren $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \hat{q}_4$ ein solches System.

Der Ansatz

$$x_1\hat{q}_1 + x_2\hat{q}_2 + x_3\hat{q}_3 + x_4\hat{q}_4 = 0$$

führt auf ein homogenes LGS mit folgender Matrix, die wir mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Treppennormalform bringen

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -4 & 4 \\ 0 & -15 & 6 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies bedeutet: $\hat{q}_4$ ist Linearkombination der drei Vektoren $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$, denn das inhomogene LGS

$$x_1\hat{q}_1 + x_2\hat{q}_2 + x_3\hat{q}_3 = \hat{q}_4$$

ist (sogar eindeutig) lösbar.

Die Vektoren $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ sind linear unabhängig, denn das LGS

$$x_1\hat{q}_1 + x_2\hat{q}_2 + x_3\hat{q}_3 = 0$$

hat nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Somit sind q_1, q_2, q_3 linear unabhängig, und q_4 ist Linearkombination dieser Vektoren. Insbesondere ist $\{q_1, q_2, q_3\}$ ein linear unabängiges Erzeugendensystem vom U und damit Basis.

Aufgabe 12. (Orthogonalprojektionen)

(a) Wegen $\| \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$ bildet $b = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von U. Also gilt $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = \langle x, b \rangle b$ und

$$\Phi(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \frac{1}{\sqrt{42}}(-5+8-3)b = 0\,.$$

(b) Wir bestimmen in U eine ONB:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{b}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\|\tilde{b}_2\| &= \frac{2}{3}\sqrt{9+1+1+1} = \frac{2}{3}\sqrt{12} \\
b_2 &= \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\Phi(x) = \langle x, b_1 \rangle b_1 + \langle x, b_2 \rangle b_2$

$$= \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Für den Abstand $d(x, U)$ gilt dann

$$d(x,U) = \|\Phi(x) - x\| = \frac{1}{2} \| \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{2} \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{3}\,.$$