Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 14. (Lineares Gleichungssystem)

Wir wenden den Gauß–Algorithmus auf die erweiterte Matrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & -t & 6t & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -t & 6t-1 & -14 \\ 2 & 1 & t & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -t & 6t & -1 \\ 4 & -1 & -t & 6t-1 & -14 \\ 2 & 1 & t & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -t & 6t-2 & -11 \\ 0 & -3 & -t & 6t-3 & -24 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also für $t = 0$ nicht lösbar. Für $t \neq 0$ machen wir weiter und vertauschen die 1. mit der 2. Zeile:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -t & 6t-2 & -11 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -t & 6t-3 & -24 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -t & 6t-2 & -11 \\ 0 & 3 & 2t & -12t+5 & 27 \\ 0 & -3 & -t & 6t-3 & -24 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -t & 6t-2 & -11 \\ 0 & 3 & 2t & -12t+5 & 27 \\ 0 & 0 & t & -6t+2 & 3 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ + \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -t & 6t-2 & -11 \\ 0 & 3 & 2t & -12t+5 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -6t+2 & 2 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist somit auch für $-6t + 2 = 0$, also für $t = \frac{1}{3}$ unlösbar. Für alle anderen t, also für $t \neq 0, \frac{1}{3}$, gibt es eine Lösung. Diese ist

$$
\begin{aligned}
&x_4 = \frac{1}{-3t+1}, \quad x_3 = \frac{1}{t},\\
&3x_2 + 2 + \frac{-12t+5}{-3t+1} = 27 \Rightarrow 3x_2 = 25 - \frac{-12t+5}{-3t+1} = \frac{-63t+20}{-3t+1} \Rightarrow x_2 = \frac{63t-20}{9t-3},\\
&x_1 = \frac{63t-20}{9t-3} + 1 + 2 - 11 = \frac{-9t+4}{9t-3}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 15. (Produktregel)

Seien $c_{ik}(t)$ die Komponenten der $(l,n)-$ Matrix $C(t) = (AB)(t) = A(t)B(t)$. Dann gilt

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) b_{jk}(t), \quad (1 \leq i \leq l,\ 1 \leq k \leq n)\,.$$

Die Komponenten von $(AB)'(t) = C'(t)$ sind

$$
\begin{aligned}
c'_{ik}(t) &= \sum_{j=1}^{m} \left(a'_{ij}(t) b_{jk}(t) + a_{ij}(t) b'_{jk}(t)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{m} a'_{ij}(t) b_{jk}(t) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) b'_{jk}(t)\,,
\end{aligned}
$$

das sind die Komponenten von $A'(t)B(t)$ und $A(t)B'(t)$. Damit ist die Gleichung bewiesen.