

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie  
SS 2006

Musterlösungen zum 6. Übungsblatt

**Aufgabe 16. (Matrixinversion)**

(a) Erst mal sieht man sofort:

$$A \cdot X + B = C \Leftrightarrow A \cdot X = C - B = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 & 5 \\ -5 & 0 & 5 & 15 \\ 10 & 20 & 25 & -5 \end{pmatrix}.$$

Nun versucht man, die Matrix  $A$  zu invertieren. Klappt das, so ist ganz offensichtlich

$$A \cdot X = C - B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

eine Lösung der Matrixgleichung. Diese ist dann auch eindeutig bestimmt. Mit Gauß geht die Inversion von  $A$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \\ \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 & 5 \\ -5 & 0 & 5 & 15 \\ 10 & 20 & 25 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15 & -20 & -20 & 20 \\ -6 & -9 & -12 & 7 \\ 4 & 11 & 13 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses  $X$  ist eindeutig.