Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 19. (Drehung)

(a) Die Drehachse bleibt bei der Drehung unverändert, d.h. für alle x auf der Achse gilt $A\,x = x$. Um diese x zu bestimmen, lösen wir das LGS $4(A-E)x = 0$ mittels Gaußalgorithmus (und vereinfachen noch etwas).

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid\cdot(-\sqrt{6}+2\sqrt{2}) \qquad \mid\cdot(-1) \qquad \mid\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{6}-8\sqrt{2} & 4\sqrt{6}-8\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{2} & \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot(-\frac{1}{8}) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen lauten jetzt $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Ein Einheitsvektor, der das erfüllt, ist zum Beispiel

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Drehebene E hat v_1 als Normalenvektor, d.h. die Punkte $x \in E$ erfüllen

$$0 = \langle x, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot (-1)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3)\,.$$

Zwei linear unabhängige Vektoren, die das erfüllen sind, sind z.B.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung der Drehebene

$$E: \quad x = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Um den Drehwinkel α zu bestimmen, betrachten wir das Bild eines Vektors in der Drehebene, also z.B. $\Phi(w) = A\,w = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\cos\alpha = \frac{\langle w, A\,w \rangle}{\|w\| \cdot \|A\,w\|} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot \sqrt{3/4 + 2/16 + 2/16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

also $\alpha = \pi/6$ oder $\alpha = -\pi/6$.

(d) Da (v_1, u, w) paarweise orthogonal sind, $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|w\| = 1$ bilden die Vektoren v_1,

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine ONB des $\mathbb{R}^3$. Ausserdem gilt $A\,v_1 = v_1$ (klar),

$$A\,v_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$$

$$A\,v_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$$

Daraus liest man die Abbildungsmatrix der Drehung Φ bzgl. der ONB (v_1, v_2, v_3) ab zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dies ist gleich B (siehe Aufgabe), wenn $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, d.h. $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ist.

Aufgabe 20. (noch eine Drehung)

Ein Einheitsvektor in Richtung der Drehachse ist $v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ein dazu orthogonaler Einheitsvektor ist $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Einen zu beiden Vektoren orthogonalen Vektor erhalten wir aus
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, wir setzen $v_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(v_1, v_2, v_3) ist eine ONB mit $\Phi(v_1) = v_1$, $\Phi(v_2) = \cos\alpha \cdot v_2 + \sin\alpha \cdot v_3 = v_3$,
$\Phi(v_3) = -\sin\alpha \cdot v_2 + \cos\alpha \cdot v_3 = -v_2$ (wegen $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$).
Da v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis bilden, gilt

$$e_i = \sum_{k=1}^{3} \langle e_i, v_k \rangle v_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wendet man Φ auf beide Seiten dieser Gleichung an, dann ergibt sich

$$\Phi(e_i) = \sum_{k=1}^{3} \langle e_i, v_k \rangle \Phi(v_k) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
\Phi(e_1) &= \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3 + \frac{1}{3\sqrt{2}}(-v_2) = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\ -4\\ -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8-3+3\\ 4-12\\ -8-3-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\\ -4\\ -7 \end{pmatrix},\\
\Phi(e_2) &= \frac{1}{3}v_1 - \frac{4}{3\sqrt{2}}(-v_2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2+6\\ 1\\ -2+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8\\ 1\\ 4 \end{pmatrix},\\
\Phi(e_3) &= -\frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_3 - \frac{1}{3\sqrt{2}}(-v_2) = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -2\\ -1\\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1\\ -4\\ -1 \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -8+3+3\\ -4-12\\ 8+3-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1\\ -8\\ 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man erhält die Abbildungsmatrix, indem man $\Phi(e_1)$, $\Phi(e_2)$, $\Phi(e_3)$ in die Spalten einer Matrix schreibt, also

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -1\\ -4 & 1 & -8\\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21. (Determinanten)

(a)

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 1 & 2 \end{vmatrix}\\
&= 3\cdot(4-4) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3\\ 8 & 7 & 5 & 6\\ -2 & 0 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & -9 & -27 & -18\\ 0 & 4 & 9 & 10\\ 0 & -2 & -12 & -12 \end{vmatrix}\\
&= -9\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 9 & 10\\ 0 & -2 & -12 & -12 \end{vmatrix} = -9\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -8 \end{vmatrix}\\
&= -9\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = (-9)\cdot(-3)\cdot(-12) = -324
\end{aligned}$$

(b) $\det\left(\frac{1}{2}A\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\det A = \frac{1}{4}$

$\det(A^{-1}A^TA) = \det(A^{-1})\cdot\det(A^T)\cdot\det A = \det(A^T) = \det A = 4$