Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 22. (Eigenbasis)

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der dritten Zeile liefert

$$p(\lambda) = +(2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \big((3-\lambda)(6-\lambda) - 4\big) = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 9\lambda + 14)$$

Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p. Eine davon ist $\lambda_1 = 2$. Die anderen beiden berechnen sich zu

$$\lambda_{2/3} = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2},$$

also zu $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = 2$. Insgesamt hat damit A die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2 \text{ (zweifacher Eigenwert)}, \ \lambda_2 = 7.$$

Wir bestimmen die Eigenräume zu diesen Eigenwerten. Dazu müssen wir die Lösungsräume der LGSe

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_i & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda_i & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen für $i \in \{1, 2\}$.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} = [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(7) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0,\ 2 \cdot x_1 - x_2 = 0 \right\} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}].
\end{aligned}$$

Bezüglich folgender Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A

$$B = (\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

besitzt $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(x) = A \cdot x$ die Abbildungsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

insbesondere ist Φ diagonalisierbar.

Aufgabe 24. (Hauptachsentransformation)

$$\begin{aligned}
8x_1^2 + 12x_1x_2 + 17x_2^2 + 20\sqrt{6}x_1 + 10\sqrt{6}x_2 - 22 &= 0 \\
\iff x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}}_{=:A} x + \underbrace{(20\sqrt{6},\ 10\sqrt{6})}_{=:b^T} x - 22 = 0.
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A:
$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (8-\lambda)(17-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$
$\iff (\lambda = 5 =: \lambda_1 \ \vee \ \lambda = 20 =: \lambda_2)$.

Eigenvektoren: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Koordinatenwechsel:

$$x = (u_1, u_2) y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von x_1 und x_2 in die gegebene Kurvengleichung und Umformung liefert

$$\frac{8}{5}(4y_1^2+4y_1y_2+y_2^2)+\frac{12}{5}(-2y_1^2+3y_1y_2+2y_2^2)+\frac{17}{5}(y_1^2-4y_1y_2+4y_2^2)$$
$$+20\sqrt{\frac{6}{5}}(2y_1+y_2)+10\sqrt{\frac{6}{5}}(-y_1+2y_2)-22=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\frac{25}{5}y_1^2+\frac{100}{5}y_2^2+30\sqrt{\frac{6}{5}}y_1+40\sqrt{\frac{6}{5}}y_2-22=0 \quad\stackrel{\cdot 1/5}{\Longleftrightarrow}$$
$$y_1^2+2\cdot 3\sqrt{\frac{6}{5}}\cdot y_1+\frac{9\cdot 6}{5}+(2y_2)^2+2\cdot 2\sqrt{\frac{6}{5}}\cdot 2y_2+\frac{4\cdot 6}{5}-\frac{54+24+22}{5}=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$(y_1+3\sqrt{\frac{6}{5}})^2+(2y_2+2\sqrt{\frac{6}{5}})^2-20=0 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\left(\underbrace{y_1+3\sqrt{\frac{6}{5}}}_{=:z_1}\right)^2+4\left(\underbrace{y_2+\sqrt{\frac{6}{5}}}_{=:z_2}\right)^2-20=0.$$

Zweiter Koordinatenwechsel: $z=y+\begin{pmatrix}3\sqrt{\frac{6}{5}}\\ \sqrt{\frac{6}{5}}\end{pmatrix}$.

Die Kurvengleichung in Koordinaten z_1 und z_2 lautet nun
$z_1^2+2z_2^2-20=0$. Damit ist die gesuchte Normalform

$$\left(\frac{z_1}{2\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z_2}{\sqrt{5}}\right)^2=1\,.$$

Die Kurve ist also eine Ellipse. Skizze: