Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 25. (Logistische Gleichung)

Wir formen die logistische Gleichung erst mal um zu

$$\frac{dx}{x(t) \cdot (a - x(t))} = kdt,$$

also in eine Gleichung mit getrennten Veränderlichen. Nun können wir (mit Partialbruchzerlegung auf der linken Seite) beide Seiten integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(t) \cdot (a - x(t))} &= \frac{A}{x(t)} + \frac{B}{a - x(t)} = \frac{A \cdot a - A \cdot x(t) + B \cdot x(t)}{x(t) \cdot (a - x(t))} \\ &\Rightarrow \quad A = B, A = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Die Gleichung oben schreibt sich damit als

$$\left(\frac{1}{a \cdot x(t)} + \frac{1}{a \cdot (a - x(t))} \right) dx = kdt$$

Nun integrieren wir beide Seiten und erhalten

$$\frac{1}{a} \cdot (\ln |x(t)| - \ln |a - x(t)|) = k \cdot t + C$$

Wendet man darauf die Rechenregeln für ln und die Exponentialfunktion an, so erhält man

$$\frac{|x(t)|}{|a - x(t)|} = c \cdot e^{akt}.$$

In den uns interessierenden Fällen ist $x(t) \geq 0$ und die Maximalzahl der Individuen noch nicht erreicht, also $a > x(t)$, weshalb wir die Betragsstriche auch wieder weglassen können. Die allgemeine Lösung der logistischen Gleichung ist damit

$$x(t) = \frac{ace^{akt}}{1 + ce^{akt}}$$

für $0 < x_0 < a$. Wir berechnen aus der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ die Konstante c: Es ist

$$x(0) = x_0 = \frac{ac}{1 + c} \Rightarrow c = \frac{x_0}{a - x_0}$$

und damit die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$x(t) = a \cdot \frac{x_0 e^{akt}}{a - x_0 + x_0 e^{akt}}.$$

Nun noch die Spezialfälle: Für $x_0 = 0$ ist $x(t) = 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Das sollte auch so sein, denn wenn die Population am Anfang Null war und (in unserem Modell) keine Tiere zuwandern, wo sollen dann irgendwann welche herkommen?

Für $x_0 = a$ ergibt sich $x(t) = a$ als Lösung, was auch wieder klar ist, denn wenn die Population schon die Maximalzahl erreicht hat, kann sie nicht mehr weiter wachsen.

Zur Berechnung des größten momentanen Zuwachses berechnen wir

$$x'(t) = \frac{ka^2 x_0 (a - x_0) e^{akt}}{\left(a - x_0 + x_0 e^{akt}\right)^2} > 0$$

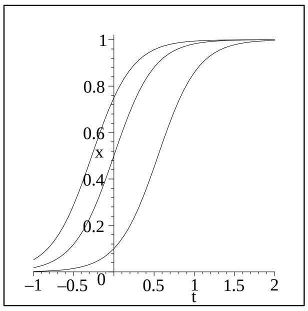
und

$$x''(t) = \frac{k^2 a^3 x_0 (x_0 - a)\left(x_0 - a + x_0 e^{akt}\right)}{\left(a - x_0 + x_0 e^{akt}\right)^3}.$$

Damit gilt

$$x''(t_0) = 0 \iff e^{akt_0} = \frac{a - x_0}{x_0} \iff t_0 = \frac{\ln((a - x_0)/x_0)}{ak}.$$

(Wegen $x' > 0$ wächst x monoton, x' fällt also monoton für $t > t_0$.) Da $t_0 \geq 0$ nur für $x_0 \leq a/2$ gilt, folgt insgesamt:
Für $x_0 \leq a/2$ ist $x'(t)$ zum Zeitpunkt $t = t_0 = \ln((a - x_0)/x_0)/(ak)$ maximal,
für $x_0 > a/2$ ist $x'(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal.



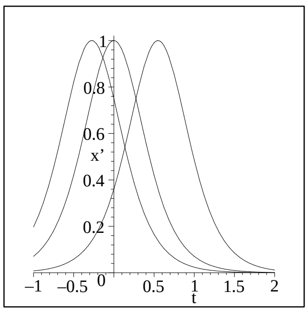


Abbildung 1a: $x(t)$ für $k = 4$, $a = 1$ und $x_0 = \frac{1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}$

Abbildung 1b: $x'(t)$ für $k = 4$, $a = 1$ und $x_0 = \frac{1}{10}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}$

Man sieht schön, wie sich die Population zuerst sehr schnell und dann immer langsamer werdend an die maximale Kapazität des Biotops annähert.

Aufgabe 27. (Fundamentalsystem)

Wir schreiben das System von Differentialgleichungen als Matrixgleichung

$$x'(t) = A\,x(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um ein Fundamentalsystem zu erhalten, benötigen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ von A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der dritten Spalte liefert

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2-\lambda \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot (-2\lambda + 4 + 2\lambda) + (2-\lambda) \cdot (\lambda + \lambda^2 + 4 + 2\lambda) = -8 + (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 3\lambda + 4) \\ &= -8 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 8 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) \end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p. Eine davon ist $\lambda_1 = 0$. Die anderen beiden berechnen sich zu

$$\lambda_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

also zu $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$.

Wir bestimmen die Eigenräume zu diesen Eigenwerten. Dazu müssen wir die Lösungsräume der lineare Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_i & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda_i & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen für $i \in \{1, 2\}$.

Es ergibt sich:

$$\mathbb{E}(0): \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}(0) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

$$\mathbb{E}(-2): \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \quad + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(-2) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

$$\mathbb{E}(1): \qquad \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot\frac{3}{2} \quad \cdot(-1) \mid \cdot\frac{1}{2} \\ \quad + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \cdot 1 \mid \cdot\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(1) = [\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}]$$

Ein Fundamentalsystem ist daher

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems $x' = A\,x$) lautet

$$x(t) = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_2\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_3\, e^{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}.$$