Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 29. (Inhomogenes lineares System)

In Matrixform sieht das System folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen zunächst das zugehörige homogene System

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

durch Bestimmung eines Fundamentalsystems. Zuerst berechnen wir die Eigenwerte der Matrix.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind dann $\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 5,\; \lambda_2 = -1\,.$

Damit berechnen sich die zugehörigen Eigenräume zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(5) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 4x_2 \right\} = [\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(-1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -2x_2 \right\} = [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}]. \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem für das homogene System ist daher gegeben durch

$$u_1(t) = e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\; u_2(t) = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems gegeben durch

$$x(t) = \mu_1 \cdot u_1(t) + \mu_2 \cdot u_2(t).$$

Nun machen wir Variation der Konstanten. Wir setzen an

$$x(t) = \mu_1(t) \cdot u_1(t) + \mu_2(t) \cdot u_2(t),$$

also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_2(t) \cdot 2e^{-t}, \\ x_2(t) &= \mu_1(t) \cdot e^{5t} + \mu_2(t) \cdot (-1)e^{-t}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \mu_1'(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_1(t) \cdot 20e^{5 \cdot t} + \mu_2'(t) \cdot 2e^{-t} + \mu_2(t) \cdot (-2)e^{-t}, \\ x_2'(t) &= \mu_1'(t) \cdot e^{5t} + \mu_1(t) \cdot 5e^{5t} + \mu_2'(t) \cdot (-1)e^{-t} + \mu_2(t) \cdot e^{-t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in das Differentialgleichungssystem ergibt

$$\begin{aligned} & \mu_1'(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_1(t) \cdot 20e^{5t} + \mu_2'(t) \cdot 2e^{-t} + \mu_2(t) \cdot (-2)e^{-t} \\ = \; & 3 \cdot (\mu_1(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_2(t) \cdot 2e^{-t}) + 8 \cdot (\mu_1(t) \cdot e^{5t} + \mu_2(t) \cdot (-1)e^{-t}) - 10 \\ \Leftrightarrow \; & \mu_1'(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_2'(t) \cdot 2e^{-t} = -10\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_1'(t) \cdot e^{5t} + \mu_1(t) \cdot 5e^{5t} + \mu_2'(t) \cdot (-1)e^{-t} + \mu_2(t) \cdot e^{-t} \\ = \; & \mu_1(t) \cdot 4e^{5t} + \mu_2(t) \cdot 2e^{-t} + \mu_1(t) \cdot e^{5t} + \mu_2(t) \cdot (-1)e^{-t} - 1 \\ \Leftrightarrow \; & \mu_1'(t) \cdot e^{5t} + \mu_2'(t) \cdot (-1)e^{-t} = -1\,. \end{aligned}$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4e^{5t} & 2e^{-t} & -10 \\ e^{5t} & -e^{-t} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-4) \;\big|\; \cdot e^{-5t} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6e^{-t} & -6 \\ 1 & -e^{-6t} & -e^{-5t} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{6}e^{-5t} \;\big|\; \cdot \frac{1}{6}e^{t} \\ \leftarrow + \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2e^{-5t} \\ 0 & 1 & -e^{t} \end{array}\right)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mu_1'(t) &= -2e^{-5t} \quad \Rightarrow \quad \mu_1(t) = \frac{2}{5} \cdot e^{-5t} + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ \mu_2'(t) &= -e^{t} \quad \Rightarrow \quad \mu_2(t) = -e^{t} + c_2\,, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{5}e^{-5t} \cdot u_1(t) - e^{t} \cdot u_2(t) \\ &= \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist damit gegeben durch

$$x(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t) + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$