Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 32. (Partielle Ableitungen)

(a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f_x(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Es gilt (die Existenz der Grenzwerte zeigt die Existenz der partiellen Ableitungen):

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

(b)

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Es gilt hier $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. Nach dem Satz von Schwarz können daher nicht alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung stetig sein.

(c)

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0+h,0) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_{yy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0,0+h) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

Die Hessematrix im Punkt $(0,0)$ ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$