Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
SS 2006

Musterlösungen zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 34. (Potentialfeld)

Da der Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist, genügt es, die Integrabilitätsbedingungen nachzuprüfen. Wir berechnen also die partiellen Ableitungen der gegebenen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= y^2 + axz, \\ f_2(x,y,z) &= z^2 + 2xy, \\ f_3(x,y,z) &= x^2 + 2yz. \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen, die wir nachprüfen müssen sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \ \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2y = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} &= ax \stackrel{!}{=} 2x = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 2z = \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{aligned}$$

Die erste und die dritte Bedingung sind immer erfüllt, die zweite genau dann, wenn $a = a_0 = 2$ ist. Für a_0 ist $f_{a_0}(x,y,z)$ ein Potentialfeld. Nun berechnen wir noch das zugehörige Potential $F(x,y,z)$ mit $\operatorname{grad}(F) = \mathbf{f}_{a_0}$. Das geht so:

Zuerst integrieren wir $f_1(x,y,z)$ nach x:

$$\int (y^2 + 2xz)\, dx = y^2x + x^2z + g(y,z) =: F_1(x,y,z)$$

für eine differenzierbare Funktion $g(y,z)$. Ableiten nach y liefert

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yx + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \stackrel{!}{=} f_2 = z^2 + 2xy \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = z^2 \\ \Leftrightarrow \quad & g(y,z) = z^2y + h(z) \end{aligned}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $h(z)$. Das liefert

$$F_2(x,y,z) = y^2x + x^2z + z^2y + h(z).$$

Nun brauchen wir noch

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = x^2 + 2zy + \frac{dh}{dz} \overset{!}{=} f_3 = x^2 + 2yz.$$

Das liefert sofort

$$\frac{dh}{dz} = 0 \ \Rightarrow \ h(z) = c$$

für eine reelle Konstante c. Damit ist das zum Vektorfeld $\mathbf{f}_2(x,y,z)$ gehörende Potential gegeben durch

$$F(x,y,z) = y^2x + x^2z + z^2y + c.$$

Aufgabe 35. (Jacobi-Matrix)

(a) Wir benötigen die partiellen Ableitungen von f.

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,, \\ f_y(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Es gilt (die Existenz der Grenzwerte zeigt die Existenz der partiellen Ableitungen):

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,, \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Jacobi-Matrix gegeben durch

$$J_f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}\right) & \text{für} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) & \text{für} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(b) Wir untersuchen für $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ den Ausdruck

$$\frac{f\big((0,0)+(h_1,h_2)\big) - f(0,0) - J_f(0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{\|h\|} = \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}\,.$$

Wäre f an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar, so müsste der Limes $\|h\| \to 0$ existieren und gleich Null sein.

Betrachtet man aber eine Folge längs der Diagonalen, z.B. $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, so gilt $\|(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\| = \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$, aber

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})^{3/2}} = \frac{n}{2^{3/2}} \nrightarrow 0\,.$$

Aufgabe 36. (Totales Differential)

(a) f ist als Komposition auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbarer Funktionen selbst auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar.

$$\begin{array}{rcl} f_x(x,y,z) & = & e^{x^2-y^2}\,2x+z \\ f_y(x,y,z) & = & e^{x^2-y^2}\,(-2y) \\ f_z(x,y,z) & = & x \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{grad} f(u) = (-1, -2e^{-1}, 0)$$

Damit ist das totale Differential gegeben durch $df(u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$(h_1, h_2, h_3) \mapsto \langle (-1,\ -2e^{-1},\ 0), (h_1, h_2, h_3) \rangle = -h_1 - 2\,e^{-1}\,h_2\,.$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u) = \langle \operatorname{grad} f(u), v \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 - 2e^{-1})$$