Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. Volker Drumm
Dr. Gabriele Link

SS 2006

**Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie**

**Übungsblatt 4**

**Aufgabe 10. (Lineare (Un-)Abhängigkeit)** **(4 Punkte)**

Es sei $V$ ein $n-$dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Sind $b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$ linear abhängig, so sind auch die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_k, x$ linear abhängig für jeden Vektor $x \in V$.

(b) Sind $b_1, b_2, \ldots, b_k$ linear unabhängig, so ist auch jedes Teilsystem dieser Vektoren linear unabhängig.

(c) Sind $b_1, b_2, \ldots, b_k$ linear unabhängig, und ist $k < n$, dann gibt es einen Vektor $x \in V$ dergestalt, dass auch $b_1, b_2, \ldots, b_k, x$ linear unabhängig sind.

**Aufgabe 11. (Basis für Untervektorraum)** **(4 Punkte)**

Es sei $V$ der Vektorraum der reellen Polynome und $U = [q_1, q_2, q_3, q_4] \subset V$ ein Untervektorraum, wobei

$$q_1(x) = x^{11} - x^7 + 2x^2 + x \qquad q_2(x) = 3x^{11} - x^2 + 2x$$
$$q_3(x) = -3x + 4x^2 - x^7 + x^{11} \qquad q_4(x) = x^{11} + 2x^7 - 7x^2 + 4x$$

Bestimmen Sie unter den Vektoren $q_1, q_2, q_3, q_4$ eine Basis von $U$.

**Aufgabe 12. (Orthogonalprojektionen)** **(4 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{auf die Gerade} \quad g = [\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}] \subset \mathbb{R}^3.$$

(b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion des Vektors $x \in \mathbb{R}^4$ auf den Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^4$ wobei

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Wie groß ist der Abstand $d(x, U)$ ?

(c) Sei $V = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus Aufgabe 6. Bestimmen Sie dasjenige Polynom $p$ vom Grad $\leq 2$, das die Funktion $f \in V$ definiert durch $f(x) = e^x$ für $x \in [-1,1]$ „am besten approximiert“, für das also $\|f - p\|$ minimal ist.

*Hinweis zu (c):* Verwenden Sie die Lösung von Aufgabe 6 und folgende Integrationsformeln:

$$\int_{-1}^{1} x e^x dx = \frac{2}{e}, \qquad \int_{-1}^{1} x^2 e^x dx = e - \frac{5}{e}$$

**Abgabe:** Am Mittwoch, den 31.05.2006, bis **8:00 Uhr** in die Einwurfkästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes. Um den Korrekturaufwand der Tutoren in Grenzen zu halten, geben Sie bitte in **Zweiergruppen** innerhalb desselben Tutoriums ab.