Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. Volker Drumm
Dr. Gabriele Link

SS 2006

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
Übungsblatt 5

Aufgabe 13. (Ebenenspiegelung) **(4 Punkte)**

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch den Ursprung 0 mit zugehörigem Einheitsnormalenvektor n. Eine *Spiegelung* an E ist eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} (1) & \Phi(x) - x \perp E \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \\ (2) & \tfrac{1}{2}(\Phi(x) + x) \in E \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 . \end{array}$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
  (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\Phi(x) = x - 2\,\langle x, n\rangle\, n$.
  (Damit ist Φ linear und eindeutig bestimmt.)
  (ii) $\Phi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
  (iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x - y\|$.

(b) Seien nun v_1, v_2 linear unabhängige Vektoren aus E. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis (n, v_1, v_2).

Aufgabe 14. (Lineares Gleichungssystem) **(4 Punkte)**

Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & - & tx_3 & + & 6tx_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & tx_3 & + & (6t-1)x_4 & = & -14 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array} .$$

Aufgabe 15. (Produktregel für Matrizen) **(4 Punkte)**

Es seien $A(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Matrizen, deren Komponenten $a_{ij}(t)$ und $b_{ij}(t)$ differenzierbare Funktionen der reellen Variable t sind.

Zeigen Sie:

$$(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Dabei ist $A'(t)$ die Matrix mit den Komponenten $a'_{ij}(t)$.

Abgabe: Am Mittwoch, den 07.06.2006, bis **8:00 Uhr** in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes. Um den Korrekturaufwand der Tutoren in Grenzen zu halten, geben Sie bitte in **Zweiergruppen** innerhalb desselben Tutoriums ab.