

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie
Übungsblatt 9

Aufgabe 25. (Logistische Gleichung) (4 Punkte)

Das folgende Anfangswertproblem ist ein stark vereinfachtes Modell für das Wachstum einer Population mit spezifischer Wachstumsrate $k > 0$ in einem Biotop mit Kapazität $a > 0$. Die Individuenzahl zum Zeitpunkt t ist $x(t)$.

$$\begin{aligned}x'(t) &= kx(t)(a - x(t)), & t \geq 0 \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem in den Fällen $x_0 = 0$, $0 < x_0 < a$ und $x_0 = a$. Skizzieren Sie die Lösungen in einem (t, x) -Koordinatensystem. Zu welchem Zeitpunkt ist der momentane Zuwachs $x'(t)$ am größten?

Aufgabe 26. (Separation der Variablen) (4 Punkte)

(a) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}x'(t)(2t + 1) + (x(t))^3 &= 0, & t \geq 0 \\x(0) &= 1\end{aligned}$$

(b) Bei der chemischen Reaktion $2A \rightarrow B + C$ sei zur Zeit $t = 0$ lediglich der Stoff A in der molaren Konzentration $a > 0$ vorhanden. Nun nehme die Konzentration $b(t)$ von B mit der Zeit t so zu, dass dabei die Reaktionsgeschwindigkeit $b'(t)$ proportional zum Quadrat der Konzentration a von A ist, also

$$b'(t) = k(a - 2b(t))^2 \quad (*)$$

mit einer Konstanten $k > 0$.

Lösen Sie die Differentialgleichung $(*)$ mit der Anfangsbedingung $b(0) = 0$.

Aufgabe 27. (Fundamentalsystem) (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen und die allgemeine Lösung des folgenden linearen Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\x'_2(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \\x'_3(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t).\end{aligned}$$

Abgabe: Am Mittwoch, den 05.07.2006, bis **8:00 Uhr** in die Kästen bei Zi. 328 des Mathematikgebäudes. Um den Korrekturaufwand der Tutoren in Grenzen zu halten, geben Sie bitte in **Zweiergruppen** innerhalb desselben Tutoriums ab.