

Konvexe Geometrie

1. Übungsblatt

1. Aufgabe (4 Punkte)

Ein *Strahl* $R \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$R := \{x + \alpha y : \alpha \geq 0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in S^{n-1},$$

(x ist der Anfangspunkt und y die Richtung des Strahls).

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen und unbeschränkt. Zeigen Sie, dass A einen Strahl enthält.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\ker A := \{x \in A : [x, y] \subset A \text{ für alle } y \in A\}$$

der *Kern* von A . Zeigen Sie, dass $\ker A$ konvex ist. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass aus $A \subset B$ nicht $\ker A \subset \ker B$ folgt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine *lokal endliche* Menge, d.h. $|A \cap B(r)| < \infty$, für alle $r \geq 0$. Zu jedem $x \in A$ definieren wir die *Voronoi-Zelle*

$$C(x, A) := \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x\| \leq \|z - y\| \forall y \in A\};$$

sie besteht aus allen Punkten $z \in \mathbb{R}^n$, für die x der nächste Punkt in A ist (oder einer der nächsten Punkte).

- Zeigen Sie, dass die Voronoi-Zellen $C(x, A), x \in A$, abgeschlossen und konvex sind.
- Zeigen Sie für $\text{conv } A = \mathbb{R}^n$, dass die Voronoi-Zellen $C(x, A), x \in A$, beschränkt und polyedrisch sind (also konvexe Polytope).

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Bedingung $\text{conv } A = \mathbb{R}^n$ für die Beschränktheit der Voronoi-Zellen $C(x, A), x \in A$, nicht notwendig ist.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die *polare Menge* A° durch

$$A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \forall y \in A\}.$$

Zeigen Sie für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$:

- A° ist abgeschlossen, konvex und enthält den Ursprung 0.
- Aus $A \subset B$ folgt $A^\circ \supset B^\circ$.
- $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- Ist A ein Polytop, dann ist A° polyedrisch.

ABGABE bis Freitag, den 04. November 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.