

Konvexe Geometrie

2. Übungsblatt

5. Aufgabe (4 Punkte)

- a) Beweisen Sie folgende Version des Satzes von HELLY: Sei \mathcal{F} eine Familie von mindestens $n + 1$ abgeschlossenen konvexen Mengen im \mathbb{R}^n (\mathcal{F} kann auch unendlich sein!) mit der Eigenschaft, dass je $n + 1$ von ihnen nichtleeren Durchschnitt haben. Weiter sei wenigstens eine der Mengen aus \mathcal{F} kompakt. Dann gibt es einen Punkt, der in jeder der Mengen aus \mathcal{F} enthalten ist.
- b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass der Satz falsch wird, wenn man die Bedingung streicht, dass wenigstens eine Menge kompakt ist.

6. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Schneiderlein brüstete sich mit der Behauptung, sieben auf einen Streich erschlagen zu haben. Genauere Nachforschungen ergaben folgendes Bild: Bei den Dahingeschiedenen handelte es sich um Fliegen, die sich auf einem Marmeladenbrot des Schneiderleins niedergelassen hatten. Das Tatwerkzeug war eine Fliegenklatsche mit einer Klatschfläche von konvexer Form. Wie Spurenauswertungen auf besagtem Brot zeigten, war es zumindest möglich, jeweils drei der Opfer, in welcher Auswahl auch immer, auf einen Streich zu erschlagen, und dabei musste die Fliegenklatsche nicht einmal gedreht werden (d. h. der Stiel wies immer in die gleiche Richtung).

Kann es daher sein, dass das Schneiderlein die Wahrheit sprach?

7. Aufgabe (4 Punkte)

Sei \mathcal{F} eine endliche Familie von abgeschlossenen parallelen Strecken im \mathbb{R}^2 mit $|\mathcal{F}| \geq 3$. Zu je drei von ihnen lässt sich eine Gerade finden, die diese drei schneidet.

Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die jede der Strecken schneidet.

8. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von CARATHÉODORY:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in A$ fest. Dann ist $\text{conv } A$ die Vereinigung aller Simplices, deren Ecken in A liegen und die x_0 zur Ecke haben.

ABGABE bis Freitag, den 11. November 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.