Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II

Prof. Dr. W. Weil

Konvexe Geometrie

4. Übungsblatt

13. Aufgabe (4 Punkte)
Ein allgäuer Bauer hat ein Herde glücklicher Kühe, bestehend aus schwarzen und weißen Tieren. Eines Tages kommt der Bauer zur Weide und sieht dort alle Kühe seiner Herde müde in der Sonne liegen und dösen. Der Bauer stellt fest, dass je vier beliebig herausgegriffene Kühe sich durch einen geraden Zaun in weiße und schwarze Tiere trennen lassen. Zeigen Sie, dass es dann einen geraden Zaun gibt, der alle schwarzen Tiere von allen weißen Tieren der Herde trennt.
Hinweis: Kühe sind träge. Wenn sie in der Sonne dösen, lassen sie sich durch nichts stören, auch nicht durch einen Zaun, der vor ihren Augen gebaut wird.

14. Aufgabe (6 Punkte)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. $M \subset A$ heißt *extremal* (in A), wenn M konvex ist und aus $x, y \in A, (x, y) \cap M \neq \emptyset$ folgt: $[x, y] \subset M$. Zeigen Sie:

a) Extremale Mengen M sind abgeschlossen.

b) Jede Stützmenge von A ist extremal.

c) Sind $M, N \subset A$ extremal, dann auch $M \cap N$.

d) Ist M extremal in A und $N \subset M$ extremal in M, dann ist N extremal in A.

e) Sind $M, N \subset A$ extremal und $M \neq N$, dann gilt $\operatorname{relint} M \cap \operatorname{relint} N = \emptyset$.

f) Es sei $\mathcal{E}(A) = \{M \subset A : M \text{ extremal}\}$. Dann gilt $A = \bigcup_{M \in \mathcal{E}(A)} \operatorname{relint} M$.

15. Aufgabe (6 Punkte)
Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Mit $\mathcal{F}_m(P)$ bezeichnen wir die Familie aller m-Seiten von P, $m \in \{0, \ldots, n-1\}$.

a) Zeigen Sie: Ist $F \subset P$ eine Seite von P und $G \subset F$ eine Seite von F, so ist G auch eine Seite von P.

b) Beweisen Sie, dass jede extremale Teilmenge M von P, $\dim M < n$, eine Seite von P ist.

c) Folgern Sie unter Verwendung von Aufgabe 14, dass

$$\operatorname{bd} P = \bigcup_{m=0}^{n-1} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \operatorname{relint} F$$

gilt, wobei die Mengen auf der rechten Seite paarweise disjunkt sind.

ABGABE bis Freitag, den 25. November 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.