

Konvexe Geometrie

5. Übungsblatt

16. Aufgabe (4 Punkte)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine konvexe Funktion. Weiter sei $A \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex und enthalte keine Gerade. Zeigen Sie: Gibt es ein $y \in A$ mit

$$f(y) = \max_{x \in A} f(x),$$

so existiert auch ein $z \in \text{ext } A$ mit $f(z) = f(y)$.

17. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $0 \in A$. Die Distanzfunktion $d_A : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$ ist gegeben durch

$$d_A(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha A\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass d_A die folgenden Eigenschaften besitzt:

- d_A ist positiv homogen, nichtnegativ und konvex.
- d_A ist endlich $\iff A$ ist Nullumgebung.
- $\{d_A < 1\} \subset A \subset \{d_A \leq 1\} \subset \text{cl } A$.
- Gilt $0 \in \text{int } A$, dann: $\text{int } A = \{d_A < 1\}$, $\text{cl } A = \{d_A \leq 1\}$.
- $d_A(x) > 0 \iff x \neq 0$ und $\beta x \notin A$ für ein $\beta > 0$.
- Es sei A abgeschlossen. Dann gilt:
 d_A gerade (d. h. $d_A(x) = d_A(-x) \forall x \in \mathbb{R}^n$) $\iff A$ symmetrisch zu 0 (d. h. $A = -A$).
- Es sei A abgeschlossen. Dann gilt:
 d_A ist Norm auf $\mathbb{R}^n \iff A$ symmetrisch, kompakt und Nullumgebung.
- A ist abgeschlossen $\implies d_A$ ist abgeschlossen.

18. Aufgabe (4 Punkte)

- Es sei $A \subset \mathbb{R}$ konvex und offen und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

$$f \text{ konvex} \iff f' \text{ monoton wachsend} \iff f'' \geq 0.$$

- Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} &\iff \forall x, y \in A : \langle \text{grad } f(x) - \text{grad } f(y), x - y \rangle \geq 0 \\ &\iff \forall x \in A : \text{die Hessematrix } ((f_{ij}(x))) \text{ von } f \text{ in } x \text{ ist positiv semidefinit.} \end{aligned}$$

ABGABE bis Freitag, den 02. Dezember 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.