Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II

Prof. Dr. W. Weil

Konvexe Geometrie

6. Übungsblatt

19. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ eine positiv homogene und konvexe Funktion.

a) Zeigen Sie, dass es eine konvexe Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $f = d_A$ gibt.

b) Welche Bedingung muss man an f stellen, damit A abgeschlossen gewählt werden kann?

Hinweis: d_A bezeichnet die Distanzfunktion von A aus Aufgabe 17.

20. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiv homogen und zweimal stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es konvexe Körper K, L gibt mit

$$f = h_K - h_L.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil b) der Aufgabe 18.

21. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ eine konvexe Funktion und $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$. Wir definieren den *Subgradienten* von f an der Stelle x als

$$\partial f(x) := \{v \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\partial f(x)$ ist nichtleer, kompakt und konvex.

b) $\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u \rangle \leq f'(x; u) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$.

c) Falls f in x differenzierbar ist, gilt $\partial f(x) = \{\operatorname{grad} f(x)\}$.

22. Aufgabe (4 Punkte)
Für eine kompakte konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \operatorname{int} K$ bezeichne K° die polare Menge (vergleiche Aufgabe 4). Zeigen Sie:

a) K° ist kompakt und konvex und $0 \in \operatorname{int} K^\circ$.

b) $(K^\circ)^\circ = K$.

c) $d_{K^\circ} = h_K$.

d) K Polytop $\iff$ K° Polytop.

ABGABE bis Freitag, den 09. Dezember 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.