Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. W. Weil
Mathematisches Institut II

Konvexe Geometrie

7. Übungsblatt

23. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $K, L, M \in \mathcal{K}^n$. Zeigen Sie ohne Verwendung von Stützfunktionen:

(a) Für die Stützmengen in Richtung $u \in S^{n-1}$ gilt

$$K(u) + M(u) = (K + M)(u).$$

(b) Aus $K + L \subset M + L$ folgt $K \subset M$ (Verallgemeinerung der Kürzungsregel in $\mathcal{K}^n$).

24. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $C > 0$ und $K, L \in \mathcal{K}^n$ Teilmengen der Kugel CB^n. Zeigen Sie:

a) h_K ist Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante C, also

$$|h_K(x) - h_K(y)| \leq C\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

b) Es gilt

$$|h_K(u) - h_L(v)| \leq C\|u - v\| + \|h_K - h_L\| \qquad \text{für alle } u, v \in S^{n-1}.$$

Dabei ist $\|f\| := \max_{u \in S^{n-1}} |f(u)|$ die Maximumsnorm der (stetigen) Funktion f auf S^{n-1}.

25. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (K_i) eine Folge in $\mathcal{K}^n$, deren Stützfunktionen punktweise gegen eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergieren.

Zeigen Sie: h ist Stützfunktion eines konvexen Körpers und $h_{K_i}|_{S^{n-1}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $h|_{S^{n-1}}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 24 a).

26. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Kugel K_a kleinsten Durchmessers mit $K \subset K_a$ (Umkugel).

b) Sei $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Kugel K_i maximalen Durchmessers mit $K_i \subset K$ (Inkugel).

ABGABE bis Freitag, den 16. Dezember 2005, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.