Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II

Prof. Dr. W. Weil

Konvexe Geometrie

8. Übungsblatt

27. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (K_i) ein Folge in $\mathcal{K}^n$ und $K \in \mathcal{K}^n$. Zeigen Sie: Genau dann gilt $K_i \to K$, $i \to \infty$, in der Hausdorff-Metrik, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Jeder Punkt $x \in K$ ist Limes einer geeigneten Folge (x_i) mit $x_i \in K_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

b) Für jede Folge (x_i) mit $x_i \in K_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass alle ihre Häufungspunkte in K liegen.

28. Aufgabe (4 Punkte)

a) Es seien $K, M \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper, die sich nicht durch eine Hyperebene trennen lassen, d. h. es existiert keine Hyperebene $E = \{f = \alpha\}$ mit

$$K \subset \{f \leq \alpha\}, \quad M \subset \{f \geq \alpha\}.$$

Ferner seien (K_i) und (M_i) Folgen in $\mathcal{K}^n$. Zeigen Sie:

$$K_i \to K,\, M_i \to M \Longrightarrow K_i \cap M_i \to K \cap M.$$

b) Es seien $K \in \mathcal{K}^n$ ein konvexer Körper und $E \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum mit $E \cap \operatorname{int} K \neq \emptyset$. Ferner sei (K_i) eine Folge in $\mathcal{K}^n$. Zeigen Sie:

$$K_i \to K \Longrightarrow (E \cap K_i) \to E \cap K.$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 27.

29. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $K \in \mathcal{K}^2$. Ein konvexer Körper M heißt *Rotationsmittel von* K, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und eigentliche Drehungen $\rho_1, \ldots, \rho_m$ gibt mit $M = \frac{1}{m}(\rho_1 K + \ldots + \rho_m K)$. Zeigen Sie, dass eine Folge von Rotationsmitteln existiert, die gegen eine Kreisscheibe konvergiert (dabei sind einpunktige Mengen als entartete Kreisscheiben zugelassen).

Weihnachtsaufgabe (4 Punkte)
Es sei $B = \mathbb{R}^2$ unser Backblech und $F \in \mathcal{K}^2$ eine symmetrische Plätzchenform mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ (sprich: $F - m = -F + m$) und einem Flächeninhalt, der echt größer als 4 ist. Weiter befinde sich in jedem Punkt $z \in \mathbb{Z}^2$ eine Rosine. Zeigen Sie: Stechen wir F derart in B ein, dass $m = 0$ gilt, so treffen wir mit F mindestens drei Rosinen.

ABGABE bis Freitag, den 13. Januar 2006, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.