Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. W. Weil
Mathematisches Institut II

Konvexe Geometrie

9. Übungsblatt

31. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei P ein konvexes Polygon im $\mathcal{K}^2$ und $\operatorname{int} P \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein Polygon P_1 und ein Dreieck oder eine Strecke Δ mit $P = P_1 + \Delta$.

b) P besitzt eine Darstellung $P = \Delta_1 + \cdots + \Delta_m$, wobei die Δ_j Dreiecke oder Strecken und paarweise nicht zueinander homothetisch sind. (Verwenden Sie a).)

c) Genau dann ist P ein Dreieck, wenn $m = 1$.

32. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien $K, M \in \mathcal{K}^2$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$V(K, M) \leq \frac{1}{8} F(K)\, F(M).$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 31.

33. Aufgabe (4 Punkte)

a) Seien $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{K}^n$ Strecken von der Form $s_i = [0, x_i], x_i \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$n!\, V(s_1, \ldots, s_n) = |\det(x_1, \ldots, x_n)|.$$

b) Seien $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}^n$ konvexe Körper. Zeigen Sie, dass $V(K_1, \ldots, K_n) > 0$ genau dann gilt, wenn Strecken $s_i \subset K_i$ existieren, $i = 1, \ldots, n$, deren Richtungen linear unabhängig sind.

34. Aufgabe (4 Punkte)
Für $K, K' \in \mathcal{K}^n$ ist die folgende Beziehung herzuleiten:

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : K \cap (K'+x) \neq \emptyset\}} dx = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V(\underbrace{K, \ldots, K}_{(n-j)\text{-mal}}, \underbrace{-K', \ldots, -K'}_{j\text{-mal}}).$$

ABGABE bis Freitag, den 20. Januar 2006, in der Vorlesung. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.