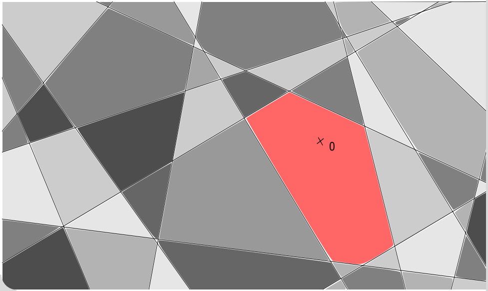
Karlsruher Institut für Technologie

Die Jordansche Normalform

Daniel Hug | 29. April 2011



Wir betrachten folgende Situation, die mit **(V)** beschrieben wird:

Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$,
seien $c_1, \ldots, c_k \in K$ paarweise verschieden,

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} \cdots (X - c_k)^{r_k}, \qquad r_i \geq 1$$
$$m = (X - c_1)^{s_1} \cdots (X - c_k)^{s_k}, \qquad 1 \leq s_i \leq r_i.$$

Man nennt $H_{c_i} := \mathrm{Kern}\,(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{r_i}$ den Hauptraum von Φ zum EW c_i und s_i den Index von H_{c_i}.

Wir betrachten folgende Situation, die mit **(V)** beschrieben wird:

Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$,
seien $c_1, \dots, c_k \in K$ paarweise verschieden,

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} \cdots (X - c_k)^{r_k}, \qquad r_i \geq 1$$
$$m = (X - c_1)^{s_1} \cdots (X - c_k)^{s_k}, \qquad 1 \leq s_i \leq r_i.$$

Man nennt $H_{c_i} := \mathrm{Kern}\,(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{r_i}$ den Hauptraum von Φ zum EW c_i und s_i den Index von H_{c_i}.

Die Haupträume H_{c_i} sind Φ-invariante Unterräume, d.h.

$$\Phi(H_{c_i}) \subset H_{c_i}, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Satz - Zerlegung in Haupträume

Sei (V) gegeben. Dann gilt:

1. $V = H_{c_1} \oplus \cdots \oplus H_{c_k}$.
2. $H_{c_i} = \mathrm{Kern}(\Phi - c_i \,\mathrm{id}_V)^{s_i}$.
3. s_i ist zugleich die kleinste natürlich Zahl s mit

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_i \,\mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Kern}(\Phi - c_i \,\mathrm{id}_V)^{s+1}.$$

Beweis. Sei $k = 2$ (der allgemeine Fall folgt mit Aufg. 1 (a), Blatt 2), d.h.

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} (X - c_2)^{r_2}.$$

Da $(X - c_1)^{r_1}$ und $(X - c_2)^{r_2}$ teilerfremd sind, gibt es $q_1, q_2 \in K[X]$ mit

$$q_1 \cdot (X - c_1)^{r_1} + q_2 \cdot (X - c_2)^{r_2} = 1.$$

Einsetzen von Φ ergibt

$$\underbrace{q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{r_1}(x)}_{=: y_1 \in H_{c_2}} + \underbrace{q_2(\Phi) \circ (\Phi - c_2 \mathrm{id}_V)^{r_2}(x)}_{=: y_2 \in H_{c_1}} = x, \quad x \in V.$$

Dies zeigt dann

$$V = H_{c_1} + H_{c_2}.$$

Beweis. Sei $k = 2$ (der allgemeine Fall folgt mit Aufg. 1 (a), Blatt 2), d.h.

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} (X - c_2)^{r_2}.$$

Da $(X - c_1)^{r_1}$ und $(X - c_2)^{r_2}$ teilerfremd sind, gibt es $q_1, q_2 \in K[X]$ mit

$$q_1 \cdot (X - c_1)^{r_1} + q_2 \cdot (X - c_2)^{r_2} = 1.$$

Einsetzen von Φ ergibt

$$\underbrace{q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{r_1}(x)}_{=: y_1 \in H_{c_2}} + \underbrace{q_2(\Phi) \circ (\Phi - c_2 \mathrm{id}_V)^{r_2}(x)}_{=: y_2 \in H_{c_1}} = x, \quad x \in V.$$

Dies zeigt dann

$$V = H_{c_1} + H_{c_2}.$$

Nachweis zu $y_1 \in H_{c_2}$:

$$\begin{aligned}(\Phi - c_2\mathrm{id}_V)^{r_2}(y_1) &= (\Phi - c_2\mathrm{id}_V)^{r_2} \circ q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1\mathrm{id}_V)^{r_1}(x)\\ &= q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1\mathrm{id}_V)^{r_1} \circ (\Phi - c_2\mathrm{id}_V)^{r_2}(x)\\ &= q_1(\Phi)(\pm p(\Phi)(x)) = q(\Phi)(0) = 0.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch die **Direktheit** der Summe $V = H_{c_1} \oplus H_{c_2}$, d.h. $H_{c_1} \cap H_{c_2} = \{0\}$: Sei also $x \in H_{c_1} \cap H_{c_2}$. Wegen

$$\underbrace{q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{r_1}(x)}_{=:y_1 \in H_{c_2}} + \underbrace{q_2(\Phi) \circ (\Phi - c_2\,\mathrm{id}_V)^{r_2}(x)}_{=:y_2 \in H_{c_1}} = x, \quad x \in V.$$

erhält man

$$x = y_1 + y_2 = 0 + 0 = 0.$$

Nachweis zu $y_1 \in H_{c_2}$:

$$\begin{aligned}(\Phi - c_2 \mathrm{id}_V)^{r_2}(y_1) &= (\Phi - c_2 \mathrm{id}_V)^{r_2} \circ q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{r_1}(x) \\ &= q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{r_1} \circ (\Phi - c_2 \mathrm{id}_V)^{r_2}(x) \\ &= q_1(\Phi)(\pm p(\Phi)(x)) = q(\Phi)(0) = 0.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch die **Direktheit** der Summe $V = H_{c_1} \oplus H_{c_2}$, d.h. $H_{c_1} \cap H_{c_2} = \{0\}$: Sei also $x \in H_{c_1} \cap H_{c_2}$. Wegen

$$\underbrace{q_1(\Phi) \circ (\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{r_1}(x)}_{=:y_1 \in H_{c_2}} + \underbrace{q_2(\Phi) \circ (\Phi - c_2\,\mathrm{id}_V)^{r_2}(x)}_{=:y_2 \in H_{c_1}} = x, \quad x \in V.$$

erhält man

$$x = y_1 + y_2 = 0 + 0 = 0.$$

Das vorangehende Argument verwendet lediglich

- $(X - c_1)^{r_1}$ und $(X - c_2)^{r_2}$ sind teilerfremd,
- $p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} (X - c_2)^{r_2}$ annuliert Φ.

Nun gilt aber auch

- $(X - c_1)^{s_1}$ und $(X - c_2)^{s_2}$ sind teilerfremd,
- $m = (X - c_1)^{s_1} (X - c_2)^{s_2}$ annuliert Φ.

Somit erhält man

$$V = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \,\mathrm{id}_V)^{s_1} \oplus \mathrm{Kern}(\Phi - c_2 \,\mathrm{id}_V)^{s_2}.$$

Das vorangehende Argument verwendet lediglich

- $(X - c_1)^{r_1}$ und $(X - c_2)^{r_2}$ sind teilerfremd,
- $p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} (X - c_2)^{r_2}$ annuliert Φ.

Nun gilt aber auch

- $(X - c_1)^{s_1}$ und $(X - c_2)^{s_2}$ sind teilerfremd,
- $m = (X - c_1)^{s_1} (X - c_2)^{s_2}$ annuliert Φ.

Somit erhält man

$$V = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \,\mathrm{id}_V)^{s_1} \oplus \mathrm{Kern}(\Phi - c_2 \,\mathrm{id}_V)^{s_2}.$$

Das vorangehende Argument verwendet lediglich

- $(X - c_1)^{r_1}$ und $(X - c_2)^{r_2}$ sind teilerfremd,
- $p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} (X - c_2)^{r_2}$ annuliert Φ.

Nun gilt aber auch

- $(X - c_1)^{s_1}$ und $(X - c_2)^{s_2}$ sind teilerfremd,
- $m = (X - c_1)^{s_1} (X - c_2)^{s_2}$ annuliert Φ.

Somit erhält man

$$V = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \,\mathrm{id}_V)^{s_1} \oplus \mathrm{Kern}(\Phi - c_2 \,\mathrm{id}_V)^{s_2}.$$

Wegen

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{s_1} \subset \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^t, \qquad t \geq s_i$$

folgt aus der Direktheit der obigen Zerlegung

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^t = H_{c_i}, \qquad t \geq s_i.$$

“Die Kerne hören also bei $t = s_i$ auf zu wachsen.” Wir überlegen uns nun, dass “die Kerne für kleinere Exponenten strikt wachsen”.

Behauptung:
Wenn

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^t = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1}$$

dann

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1} = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+2}.$$

Wegen

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{s_1} \subset \mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^t, \qquad t \geq s_i$$

folgt aus der Direktheit der obigen Zerlegung

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^t = H_{c_i}, \qquad t \geq s_i.$$

"Die Kerne hören also bei $t = s_i$ auf zu wachsen." Wir überlegen uns nun, dass "die Kerne für kleinere Exponenten strikt wachsen".

Behauptung:
Wenn

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^t = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{t+1}$$

dann

$$\mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{t+1} = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1\,\mathrm{id}_V)^{t+2}.$$

Nachweis: Die Voraussetzung sei erfüllt. In der Folgerung gilt stets "$\subset$". Wir wollen auch "$\subset$" einsehen. Sei also $x \in \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+2}$, d.h. $(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+2}(x) = 0$. Dann ist aber

$$(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1}((\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)(x)) = 0$$

und daher

$$(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)(x) \in \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1} = \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t}.$$

Dies zeigt

$$(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1}(x) = (\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t}((\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)(x)) = 0,$$

also $x \in \mathrm{Kern}(\Phi - c_1 \mathrm{id}_V)^{t+1}$.

Wäre nun $\text{Kern}(\Phi - c_1 \text{id}_V)^t = \text{Kern}(\Phi - c_1 \text{id}_V)^{s_i}$ für ein $1 \leq t < s_i$, so wäre auch

$$V = \text{Kern}(\Phi - c_1 \text{id}_V)^t \oplus H_{c_2}.$$

Hieraus aber würde (wie früher) folgen, dass das Polynom

$$\widetilde{m} := (X - c_1)^t (X - c_2)^{s_2}$$

den Endomorphismus Φ annuliert. Dies widerspricht der Minimalität des Grades des Minimalpolynoms. $\square$

Satz - Diagonalisierbarkeit

Sei V ein n-dimensionaler K-VR und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Genau dann ist Φ diagonalisierbar, wenn $m = (X - c_1) \cdots (X - c_k)$ gilt mit p.v. $c_1, \ldots, c_k \in K$.

Beweis: "$\Rightarrow$": wurde schon gezeigt.
"$\Leftarrow$": Sei also $m = (X - c_1) \cdots (X - c_k)$. Dann ist $s_i = 1$ und nach dem vorangehenden Satz $H_{c_i} = E_{c_i}$ sowie

$$V = H_{c_1} \oplus \cdots \oplus H_{c_k} = E_{c_1} \oplus \cdots \oplus E_{c_k}.$$

Da V somit direkte Summe der Eigenräume von Φ ist, folgt die Diagonalisierbarkeit aus einem früheren Satz. $\square$

Satz - Diagonalisierbarkeit

Sei V ein n-dimensionaler K-VR und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Genau dann ist Φ diagonalisierbar, wenn $m = (X - c_1) \cdots (X - c_k)$ gilt mit p.v. $c_1, \ldots, c_k \in K$.

Beweis: "$\Rightarrow$": wurde schon gezeigt.
"$\Leftarrow$": Sei also $m = (X - c_1) \cdots (X - c_k)$. Dann ist $s_i = 1$ und nach dem vorangehenden Satz $H_{c_i} = E_{c_i}$ sowie

$$V = H_{c_1} \oplus \cdots \oplus H_{c_k} = E_{c_1} \oplus \cdots \oplus E_{c_k}.$$

Da V somit direkte Summe der Eigenräume von Φ ist, folgt die Diagonalisierbarkeit aus einem früheren Satz. $\square$

Berechnung des Index s_i eines Hauptraumes H_{c_i}:

- s_i ist der Exponent des Linearfaktors $(X - c_i)$ im Minimalpolynom m.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Kern}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Kern}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Bild}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Bild}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Rg}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Rg}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.

Berechnung des Index s_i eines Hauptraumes H_{c_i}:

- s_i ist der Exponent des Linearfaktors $(X - c_i)$ im Minimalpolynom m.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Kern}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Kern}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Bild}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Bild}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.
- s_i ist das kleinste $s \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Rg}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^s = \mathrm{Rg}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s+1}$.

Beispiel 1: Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} p &= \det(A - X\,E_4) = (X-1)(X+3)^3, \\ m &= (X-1)(X+3)^s,\ s \in \{1,2,3\}. \end{aligned}$$

Hier ist also $c_1 = 1, s_1 = 1, c_2 = -3$ und $s_2 \in \{1,2,3\}$ ist noch zu bestimmen. Dies gelingt so:

$$\operatorname{Rg}(A + 3E_4) = \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Und weiter:

$$\operatorname{Rg}(A+3E_4)^2 = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{Rg}(A+3E_4)^3 = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Dies zeigt $s_2 = 2$, $m = (X-1)(X+3)^2$.

Ferner ist

$$H_1 = E_1 = \mathrm{Kern}(A - E_4) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

und

$$H_{-3} = \mathrm{Kern}(A + 3E_4)^2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \supset E_{-3} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

Beispiel 2: Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man erhält $p = (X-2)^4$, und daher ist

$$m = (X-2)^s, \qquad s \in \{1,2,3,4\}.$$

Indexbestimmung:

$$\mathrm{Rg}(A - 2E_4) = \mathrm{Rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathrm{Rg}(A - 2E_4)^2 = \mathrm{Rg}(O) = 0.$$

Also ist $s = 2$ und $m = (X-2)^2$. Es gilt ferner

$$H_2 = \mathbb{R}^4 \supset E_2 = [\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}].$$

Fazit: Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$,
seien $c_1, \dots, c_k \in K$ paarweise verschieden,

$$p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} \cdots (X - c_k)^{r_k}, \qquad r_i \geq 1$$
$$m = (X - c_1)^{s_1} \cdots (X - c_k)^{s_k}, \qquad 1 \leq s_i \leq r_i.$$

Die Haupträume $H_{c_i} = \mathrm{Kern}(\Phi - c_i \mathrm{id}_V)^{s_i}$ sind Φ-invariante Unterräume und

$$V = H_{c_1} \oplus \cdots \oplus H_{c_k}.$$

Wählt man in jedem der Haupträume eine Basis und setzt diese (sinnvoll) zu einer Basis von V zusammen, so erhält man bezüglich dieser Basis

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & & \\ & A_{c_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{c_k} \end{pmatrix}.$$

Ziel: Da die Haupträume Φ invariant sind, können wir die weitere Untersuchung auf einen solchen beschränken.

- Sei also H_c ein Hauptraum von Φ und $\Phi : H_c \to H_c$.
- Gesucht ist eine Basis von H_c, so dass die beschreibende Matrix A_c von $\Phi\,\big|_{H_c}$ möglichst einfach ist.

Zunächst haben wir eine aufsteigende Kette von Φ-invarianten Untervektorräumen $\mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^i$:

$$\{0\} = \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^0 \subsetneq \underbrace{\mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^1}_{E_c} \subsetneq \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \cdots$$

$$\cdots \subsetneq \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^s = H_c.$$

Ziel: Da die Haupträume Φ invariant sind, können wir die weitere Untersuchung auf einen solchen beschränken.

- Sei also H_c ein Hauptraum von Φ und $\Phi : H_c \to H_c$.
- Gesucht ist eine Basis von H_c, so dass die beschreibende Matrix A_c von $\Phi\,\big|_{H_c}$ möglichst einfach ist.

Zunächst haben wir eine aufsteigende Kette von Φ-invarianten Untervektorräumen $\mathrm{Kern}(\Phi - c\mathrm{id}_V)^i$:

$$\{0\} = \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^0 \subsetneq \underbrace{\mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^1}_{E_c} \subsetneq \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \cdots$$
$$\cdots \subsetneq \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^s = H_c.$$

Mit der Bezeichnung $U_j := \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^j$, $j = 0, \ldots, s$ gilt also

$$\{o\} = U_0 \subsetneq U_1 = E_c \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_{s-1} \subsetneq U_s = H_c.$$

Also erhalten wir eine direkte Zerlegung der Form

$$\begin{array}{lllllll}
H_c = U_s = & U_{s-1} \oplus W_1 & & & & & \\
& U_{s-1} = & U_{s-2} \oplus W_2 & & & & \\
& & U_{s-2} = & U_{s-3} \oplus W_3 & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & U_2 = & U_1 \oplus W_{s-1} & \\
& & & & & U_1 = E_c &
\end{array}$$

wobei $\dim W_1 =: q_1 \geq 1$, $\dim W_2 =: q_2 \geq 1$, $\dim W_3 =: q_3 \geq 1, \ldots,$ $\dim W_{s-1} =: q_{s-1} \geq 1$, $\dim E_c =: q_s =: q \geq 1$.

Mit der Bezeichnung $U_j := \mathrm{Kern}(\Phi - c\,\mathrm{id}_V)^j$, $j = 0, \dots, s$ gilt also

$$\{o\} = U_0 \subsetneq U_1 = E_c \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_{s-1} \subsetneq U_s = H_c.$$

Also erhalten wir eine direkte Zerlegung der Form

$$\begin{array}{llllllll}
H_c = U_s = & U_{s-1} \oplus W_1 & & & & & & \\
& U_{s-1} & = & U_{s-2} \oplus W_2 & & & & \\
& & & U_{s-2} & = & U_{s-3} \oplus W_3 & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & U_2 = & U_1 \oplus W_{s-1} \\
& & & & & & & U_1 = E_c
\end{array}$$

wobei $\dim W_1 =: q_1 \geq 1$, $\dim W_2 =: q_2 \geq 1$, $\dim W_3 =: q_3 \geq 1, \dots,$
$\dim W_{s-1} =: q_{s-1} \geq 1$, $\dim E_c =: q_s =: q \geq 1$.

Basiswahl

Schritt 1: Wähle Basis $B_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{q_1}^{(1)})$ von W_1

$$x_i^{(2)} := (\Phi - c\,\mathrm{id})(x_i^{(1)}), \qquad i = 1, \ldots, q_1.$$

Beh.: $x_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, q_1$ l.u. in U_{s-1}, $[x_1^{(2)}, \ldots, x_{q_1}^{(2)}] \cap U_{s-2} = \{0\}$.

Schritt 2: Ergänze nun $(x_1^{(2)}, \ldots, x_{q_1}^{(2)})$ zu einer Basis
$B_2 = (x_1^{(2)}, \ldots, x_{q_1}^{(2)}, \ldots, x_{q_2}^{(2)})$ von W_2, insb. $q_2 \geq q_1 \geq 1$.

$$x_i^{(3)} := (\Phi - c\,\mathrm{id})(x_i^{(2)}), \qquad i = 1, \ldots, q_2.$$

Beh.: $x_i^{(3)}$, $i = 1, \ldots, q_2$ l.u. in U_{s-2}, $[x_1^{(3)}, \ldots, x_{q_2}^{(3)}] \cap U_{s-3} = \{0\}$.

Schritt 3: Ergänze nun $x_1^{(3)}, \ldots, x_{q_2}^{(3)}$ zu einer Basis
$B_3 = (x_1^{(3)}, \ldots, x_{q_2}^{(3)}, \ldots, x_{q_3}^{(3)})$ von W_3, insb. $q_3 \geq q_2 \geq q_1 \geq 1$.

So fortfahrend erhält man schließlich eine Basis
$B_{s-1} = (x_1^{(s-1)}, \ldots, x_{q_{s-1}}^{(s-1)})$ von W_{s-1}, insb. $q_{s-1} \geq q_{s-2} \geq \ldots \geq 1$.

$$x_i^{(s)} := (\Phi - c\,\mathrm{id})(x_i^{(s-1)}), \qquad i = 1, \ldots, q_{s-1}.$$

Beh.: $x_i^{(s)}$, $i = 1, \ldots, q_{s-1}$ l.u. in U_1

Schritt s: Ergänze nun $x_1^{(s)}, \ldots, x_{q_{s-1}}^{(s)}$ zu einer Basis
$B_s = (x_1^{(s)}, \ldots, x_{q_{s-1}}^{(s)}, \ldots, x_{q_s}^{(s)})$ von U_1, insb. $q_s \geq q_{s-1} \geq \ldots \geq 1$.

Beachte:

$$H_c = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{s-1} \oplus U_1$$

$$
\begin{array}{llllllllllll}
B_1: & x_1^{(1)}, & \dots, & x_{q_1}^{(1)} \\
B_2: & x_1^{(2)}, & \dots, & x_{q_1}^{(2)}, & x_{q_1+1}^{(2)}, & \dots, & x_{q_2}^{(2)} \\
B_3: & x_1^{(3)}, & \dots, & x_{q_1}^{(3)}, & x_{q_1+1}^{(3)}, & \dots, & x_{q_2}^{(3)}, & x_{q_2+1}^{(3)}, & \dots, & x_{q_3}^{(3)} \\
\vdots \\
B_s: & x_1^{(s)}, & \dots, & x_{q_1}^{(s)}, & x_{q_1+1}^{(s)}, & \dots, & x_{q_2}^{(s)}, & x_{q_2+1}^{(s)}, & \dots, & x_{q_3}^{(s)}, & \dots, & x_{q_{s-1}+1}^{(s)}, \dots, x_{q_s}^{(s)}
\end{array}
$$

Durchlaufe die Basisvektoren nun nicht zeilenweise, sondern spaltenweise:

$$B = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(s)}, \dots, x_{q_1}^{(1)}, \dots, x_{q_1}^{(s)}, x_{q_1+1}^{(2)}, \dots, x_{q_1+1}^{(s)}, \dots, x_{q_{s-1}+1}^{(s)}, \dots, x_{q_s}^{(s)})$$

Wirkung von Φ auf B: Für $j = 1, \ldots, s-1$, $i = q_{j-1}+1, \ldots, q_j$, $q_0 := 0$:

$$(\Phi - c\,\mathrm{id})(x_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)} \Leftrightarrow \Phi(x_i^{(j)}) = c \cdot x_i^{(j)} + x_i^{(j+1)}$$

Für $j = s$, $i = q_{j-1}+1, \ldots, q_j$ gilt:

$$\Phi(x_i^{(s)}) = c \cdot x_i^{(s)}.$$

Beschreibende Matrix A_c von Φ bezüglich der gewählten Basis B auf H_c:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_q \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} c & 0 & & & & & & \\ 1 & c & 0 & & & & & \\ & 1 & c & 0 & & & & \\ & & 1 & c & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & c & 0 \\ & & & & & & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Wirkung von Φ auf B: Für $j = 1, \dots, s-1$, $i = q_{j-1}+1, \dots, q_j$, $q_0 := 0$:

$$(\Phi - c\,\mathrm{id})(x_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)} \Leftrightarrow \Phi(x_i^{(j)}) = c \cdot x_i^{(j)} + x_i^{(j+1)}$$

Für $j = s$, $i = q_{j-1}+1, \dots, q_j$ gilt:

$$\Phi(x_i^{(s)}) = c \cdot x_i^{(s)}.$$

Beschreibende Matrix A_c von Φ bezüglich der gewählten Basis B auf H_c:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_q \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} c & 0 & & & & & \\ 1 & c & 0 & & & & \\ & 1 & c & 0 & & & \\ & & 1 & c & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & c & 0 \\ & & & & & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Die Jordankästchen sind:

$$
\begin{aligned}
A_1, \ldots, A_{q_1} &\in K^{s \times s} \\
A_{q_1+1}, \ldots, A_{q_2} &\in K^{(s-1)\times(s-1)} \\
&\vdots \\
A_{q_{s-1}+1}, \ldots, A_{q_s} &\in K^{1\times 1}
\end{aligned}
$$

Anzahl der Jordankästchen der Länge l:

$$
\begin{aligned}
q_{s-l+1} - q_{s-l} &= \dim(W_{s-l+1}) - \dim(W_{s-l}) \\
&= [\dim(U_{s-(s-l+1)+1}) - \dim(U_{s-(s-l+1)})] \\
&\quad - [\dim(U_{s-(s-l)+1}) - \dim(U_{s-(s-l)})] \\
&= 2\dim(U_l) - \dim(U_{l-1}) - \dim(U_{l+1})
\end{aligned}
$$

Satz (Jordanschen Normalform)

Sei V ein n-dim. K-VR, $\Phi \in \operatorname{End}(V)$, $p = (-1)^n (X - c_1)^{r_1} \cdots (X - c_k)^{r_k}$ und $m = (X - c_1)^{s_1} \cdots (X - c_k)^{s_k}$, $1 \leq s_i \leq r_i$. Dann existiert eine Basis B von V, bezüglich der Φ die Matrixdarstellung A_Φ hat mit

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & & \\ & A_{c_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{c_k} \end{pmatrix}, \qquad A_{c_i} \in K^{r_i \times r_i} : \ \text{Jordanblock zu } c_i.$$

- Jeder Jordanblock A_{c_i} ist aus Jordankästchen zum EW c_i aufgebaut.
- Im Jordanblock A_{c_i} gibt es genau

  $$2\dim\left(\operatorname{Kern}(\Phi - c_i \operatorname{id})^l\right) - \dim\left(\operatorname{Kern}(\Phi - c_i \operatorname{id})^{l-1}\right) - \dim\left(\operatorname{Kern}(\Phi - c_i \operatorname{id})^{l+1}\right)$$

  Jordankästchen der Länge l, $l \in \{1, \ldots, s_i\}$.
- Im Jordanblock A_{c_i} treten genau $\dim(E_{c_i})$ Jordankästchen auf; es gibt mindestens ein Jordankästchen der Maximallänge s_i.

Anmerkungen:

- A_Φ heißt Jordansche Normalform (JNF) von Φ zur Jordanbasis B. Die JNF ist bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.
- Zu $A \in K^{n\times n}$ betrachte $\Phi \in \mathrm{End}(K^{n\times n})$ mit $\Phi(x) = Ax$. Die JNF von A ist erklärt als die JNF von Φ, falls diese existiert.
- Sind A, B ähnliche Matrizen, und existiert die JNF zu einer von diesen, so haben beide dieselbe JNF.
- Für $K = \mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom, die JNF existiert.

Anmerkungen:

- A_Φ heißt Jordansche Normalform (JNF) von Φ zur Jordanbasis B. Die JNF ist bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.
- Zu $A \in K^{n\times n}$ betrachte $\Phi \in \mathrm{End}(K^{n\times n})$ mit $\Phi(x) = Ax$. Die JNF von A ist erklärt als die JNF von Φ, falls diese existiert.
- Sind A, B ähnliche Matrizen, und existiert die JNF zu einer von diesen, so haben beide dieselbe JNF.
- Für $K = \mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom, die JNF existiert.

Anmerkungen:

- A_Φ heißt Jordansche Normalform (JNF) von Φ zur Jordanbasis B. Die JNF ist bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.
- Zu $A \in K^{n \times n}$ betrachte $\Phi \in \mathrm{End}(K^{n \times n})$ mit $\Phi(x) = Ax$. Die JNF von A ist erklärt als die JNF von Φ, falls diese existiert.
- Sind A, B ähnliche Matrizen, und existiert die JNF zu einer von diesen, so haben beide dieselbe JNF.
- Für $K = \mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom, die JNF existiert.

Anmerkungen:

- A_Φ heißt Jordansche Normalform (JNF) von Φ zur Jordanbasis B. Die JNF ist bis auf die Reihenfolge der Kästchen eindeutig bestimmt.
- Zu $A \in K^{n\times n}$ betrachte $\Phi \in \mathrm{End}(K^{n\times n})$ mit $\Phi(x) = Ax$. Die JNF von A ist erklärt als die JNF von Φ, falls diese existiert.
- Sind A, B ähnliche Matrizen, und existiert die JNF zu einer von diesen, so haben beide dieselbe JNF.
- Für $K = \mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom, die JNF existiert.

Beispiele:

(1) $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$: Mögliche JNF sind $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}$.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Man berechnet leicht, dass $p = -(X-2)^3$ gilt. Es folgt $m = (X-2)^s$, $s \in \{1,2,3\}$. Wegen

$$\mathrm{Rg}(A - 2E_3) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

folgt $\dim(E_2) = 1$. Im einzigen Jordanblock zum EW 2 gibt es somit genau ein Jordankästchen, das zudem Maximallänge 3 haben muss. Ferner ist $s = 3$ und die JNF $\widetilde{A}$ von A ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

(1) $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$: Mögliche JNF sind $\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}$.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Man berechnet leicht, dass $p = -(X-2)^3$ gilt. Es folgt $m = (X-2)^s$, $s \in \{1,2,3\}$. Wegen

$$\operatorname{Rg}(A - 2E_3) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

folgt $\dim(E_2) = 1$. Im einzigen Jordanblock zum EW 2 gibt es somit genau ein Jordankästchen, das zudem Maximallänge 3 haben muss. Ferner ist $s = 3$ und die JNF $\widetilde{A}$ von A ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen eine Jordanbasis: $V = H_2 = \mathbb{C}^3$.

$$U_2 = \text{Kern}(\Phi - 2E_3)^2 = [\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}],$$

$$U_1 = \text{Kern}(\Phi - 2E_3)^1 = [\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}].$$

Wähle

$$x_1 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow U_2 \oplus [x_1] = \mathbb{C}^3$$

und dann

$$x_2 := (\Phi - 2E_3)x_1 = \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}, \quad x_3 := (\Phi - 2E_3)x_2 = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Dannn ist

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und es folgt $\widetilde{A} = S^{-1}AS$.