Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II

Prof. Dr. W. Weil

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

10. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Auf dem $\mathbb{R}^4$ sei ein Skalarprodukt $\beta(\cdot,\cdot)$ durch

$$\beta(x,y) = x^\top A y, \quad x,y \in \mathbb{R}^4,$$

gegeben. Bestimmen A so, dass die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis bezüglich $\beta(\cdot,\cdot)$ bilden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Der Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A,B\rangle := \mathrm{Spur}(A^\top B), \quad A,B \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

das wir schon in der 1. Aufgabe des 8. Übungsblattes kennengelernt haben.

a) Zeigen Sie, dass für $V^+ := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top = A\}$ und $V^- := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top = -A\}$ gilt:

   (i) $V^+ \perp V^-$.

   (ii) $\mathbb{R}^{n\times n} = V^+ \oplus V^-$.

b) Orthonormalisieren Sie folgende Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezüglich obigem Skalarprodukt:

$$\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

ABGABE bis Montag, den 20. Juni 2005, 12.00 Uhr in die Einwurfschlitze im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Seminarraum S 32. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.