UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
MATHEMATISCHES INSTITUT II

PROF. DR. W. WEIL

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $A \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie:

a) Ist $x \in V$, so ist $\langle x, y \rangle \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $y \in A$, und es gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{y \in A} \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

b) Es gilt $x \in [A]$ genau dann, wenn in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen steht und nur endlich viele Summanden $\langle x, y \rangle^2$, $y \in A$, positiv sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt seien der Untervektorraum U und der Vektor x gegeben durch:

$$U := [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}], x = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion $\pi(x)$ von x auf U, sowie den Abstand $d(x, U)$.

ABGABE bis Montag, den 27. Juni 2005, 12.00 Uhr in die Einwurfschlitze im Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Seminarraum S 32. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.