Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. W. Weil
Mathematisches Institut II

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II für die Fachrichtung Informatik

Ferienübungsblatt
– keine Abgabe, keine Korrektur –

Aufgabe 1
Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi : V \to V$ ein bijektiver Endomorphismus.

Zeigen Sie, dass es genau eine Isometrie $\Psi : V \to V$ und genau eine selbstadjungierte Abbildung $\chi : V \to V$ mit lauter positiven Eigenwerten gibt, sodass $\Phi = \Psi \circ \chi$ ist.

Aufgabe 2
Im $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem Standardskalarprodukt habe eine Isometrie $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4\sqrt{3} & 4 & 3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & -3 & -3\sqrt{3} & -4 \\ 4 & 3\sqrt{3} & -3 & 4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -4 & -4\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform $\tilde{A}$ von Φ.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\tilde{A}$ hat.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an mit $S^\top AS = \tilde{A}$.