Ergänzungen zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1: Es ist
$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Wir schreiben $\mathbb{R}^n_B$ für den VR $\mathbb{R}^n$, versehen mit der geordneten Basis B. Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4_B & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathbb{R}^3_C \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}\big\uparrow & & \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big\uparrow \\ \mathbb{R}^4_{\tilde{B}} & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathbb{R}^3_{\tilde{C}} \end{array} \qquad \Rightarrow\ \tilde{A}_\Phi = T^{-1}A_\Phi S.$$

Dabei ist S ist die Abbildungsmatrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$ bezüglich der Basen $\tilde{B}$ und B (T analog).

Bestimmung von $S = ((s_{ij}))$: gesucht: Darstellung $\tilde{x}_j = s_{1j}x_1 + \ldots + s_{4j}x_4,\ j \in \{1,2,3,4\}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2+Z3,\, Z4-Z3,\, Z1\leftrightarrow Z3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z3+Z4,\, Z2+Z3,\, Z4-Z2,\, Z2\leftrightarrow Z3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow\ S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung von $T^{-1} = ((t'_{ij}))$: gesucht: Darstellung $y_i = t'_{1i}\tilde{y}_1 + t'_{2i}\tilde{y}_2 + t'_{3i}\tilde{y}_3,\ i \in \{1,2,3\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3+Z1,\, -Z1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z1+Z3,\, Z2+Z3,\, Z3+Z2,\, Z1-Z3,\, -Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow\ T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\tilde{A}_\Phi$ ergibt sich: $\tilde{A}_\Phi = T^{-1}A_\Phi S = \begin{pmatrix} 17 & 7 & 1 & 15 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3:

Durch vollständige Induktion zeigt man: $\det(A_n(t)) = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$.

Aufgabe 4:

a) $\det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

b) $\det(A) = n!$.

Aufgabe 5:

a)

$$\det A_x = \begin{vmatrix} a-x & b-x & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & c-x & a-x \end{vmatrix} \overset{Z2-Z1,Z3-Z1,\ldots,Zn-Z1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a-x & b-x & \cdots & \cdots & b-x \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & c-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c-a & c-b & \ldots & c-b & a-b \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. n. 1. Zeile}}{=}$$

$$= (a-x) \begin{vmatrix} a-b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & a-b \end{vmatrix} - (b-x) \left|\cdots\right| \pm \cdots \pm (b-x) \left|\cdots\right|$$

$$=: a_0 + a_1 x,$$

ein Polynom in x mit Grad ≤ 1.

b) Mit $x = b$ ergibt sich $\det A_b = \begin{vmatrix} a-b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^n$.

Analog folgt $\det A_c = (a-c)^n$.

Aus $p = a_0 + a_1 x$ folgt $\begin{cases} a_0 + a_1 b = (a-b)^n \\ a_0 + a_1 c = (a-c)^n \end{cases}$.

$\Rightarrow a_0 = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}, a_1 = \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{b-c}$

$\Rightarrow \det A_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 = a_0$