Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$p = (a - X)^3(2 - X)^2.$$

Die Eigenwerte von A sind also $c_1 = a$ und $c_2 = 2$, und falls $a \neq 2$ ist, gilt $\dim H_a = 3$ und $\dim H_2 = 2$.

$$A - aE_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & (2-a)^2 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat Rang 3, also gilt $H_a \neq E_a$.

$$(A - aE_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2-a)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8-2a & 0 & 0 & 4-2a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2-a & 9-4a & 0 & 0 & (2-a)^2 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus zeigt also, dass der Rang dieser Matrix 2 ist.

Fall 1: $a = 2$. Hier ist $c_1 = c_2$, $\dim H_2 = 5$, also $H_2 = \mathbb{R}^5$.

$$(A - 2E_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - 2E_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Index des Hauptraumes H_2 des einzigen Eigenwertes 2 ist also 4, da $(A - 2E_5)^4 = 0$ ist. Damit ergibt sich das Minimalpolynom zu

$$m = (X - 2)^4.$$

Fall 2: $a \neq 2$. Wir haben schon berechnet, dass der Index des Hauptraumes zum Eigenwert a gleich 2 ist, und wir können außerdem ablesen:

$$H_a = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Für den zweiten Eigenwert ergibt sich:

$$(A-2E_5)=\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(a-2)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 & \frac{2}{a-2} \\ 0 & 0 & 0 & 2a-5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Rang obiger Matrix 3, falls $a=\frac{5}{2}$ ist, und 4, falls $a\neq\frac{5}{2}$ ist.

Fall 2.1: $a=\frac{5}{2}$. Weil $\dim E_2=\dim H_2$ ist, ist der Index des Hauptraumes zum Eigenwert 2 gleich 1 und

$$H_2=E_2=[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}].$$

Das Minimalpolynom ist damit

$$m=(X-a)^2(X-2).$$

Fall 2.2: $a\neq\frac{5}{2}$. In diesem Fall berechnet man:

$$(A-2E_5)^2=\begin{pmatrix} (a-2)^2 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & (a-2)^2 & 0 & 2(a-2) \\ 4(a-2) & 2 & 0 & (a-2)^2 & 0 \\ a-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(a-2)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2-2a-1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$H_2=[\begin{pmatrix} (a-2)^2 \\ -(a-2)^3 \\ 2(a^2-2a-1) \\ -2(a-2) \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}].$$

Der Index des entpsrechenden Hauptraumes ist also 2, und das Minimalpolynom ist für im Falle $a\notin\{2,\frac{5}{2}\}$ damit

$$m=(X-a)^2(X-2)^2.$$