Aufgabe 1

(a) Die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ sind linear abhängig, da jede Basis des $\mathbb{R}^3$ aus genau drei Basisvektoren besteht und diese eine maximale lin. unabh. Menge in $\mathbb{R}^3$ bilden.

Alternativ: direkte Rechnung bzw. aus (b) folgt, dass v nicht eindeutig als Linearkombination von $v_1, \dots, v_4$ darstellbar ist, woraus die lin. Abhäng. der Vektoren $v_1, \dots, v_4$ folgt.

(b) Zu bestimmen sind alle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i v_i = v,$$

d.h.,

$$\left(\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 &=& 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &=& 2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \\ \cdot 2 \\ \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &=& 2 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 &=& -3 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ - \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 &=& -1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 &=& 3 \\ -2\lambda_3 + 2\lambda_4 &=& 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ - \\ \cdot\frac{1}{2} \quad \cdot 3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& +1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_4 &=& -3 \\ \lambda_3 - \lambda_4 &=& -2 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2\lambda_4 - 3,\ \lambda_3 = \lambda_4 - 2)$$

Also gilt: $v = v_1 + (2\lambda - 3) v_2 + (\lambda - 2) v_3 + \lambda v_4$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2

(a) Sei V ein reeller VR. Eine Basis von V ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge $B \subset V$. (oder gleichwertig: eine lin. unabh. Teilmenge $B \subset V$, die zugleich ein Erzeugendensystem ist.)

Die Dimension von V ist die Anzahl der Elemente einer Basis von V (falls diese Anzahl endlich ist).

Basen eines VR sind nicht eindeutig bestimmt.

Bsp.: e_1, e_2, e_3 sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann ist

e_1, e_1+e_2, e_1+e_3 ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Die Dimension eines VR ist dagegen eindeutig bestimmt.
(Satz aus der Vorlesung)

(b) Die "Nullfunktion" $f := 0$ liegt in U, d.h. $U \neq \emptyset$.

Mit $f, g \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + g \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$
\begin{aligned}
(\lambda f+g)''(x) + 4\cdot(\lambda f+g)(x) &= \lambda f''(x) + g''(x) + \lambda\cdot 4\cdot f(x) + 4\cdot g(x) \\
&= \lambda\cdot\big(\underbrace{f''(x)+4\cdot f(x)}_{=0}\big) + \big(\underbrace{g''(x)+4g(x)}_{=0}\big) \\
&= 0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Also gilt $\lambda f + g \in U$.

Somit ist U ein Untervektorraum von $C^2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3

(a) Sei $u_1 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$,

$$b_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 := u_2 - \frac{\langle u_1, u_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2 := \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{b_1, b_2\}$ eine ONB von U.

Man sieht leicht, dass $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \perp U$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} \perp U$, und somit ist

$U^\perp = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]$ (wegen $\dim U^\perp = 2$ und der Lin. Unabh. der beiden Vektoren).

(Alternativ: $U^\perp$ ist die Lösungsmenge des Lin. Gleichungssystems

$$\left(\begin{array}{ll} \langle u_1, v\rangle = 0 \\ \langle u_2, v\rangle = 0 \end{array}, \quad v \in \mathbb{R}^4\right).\;)$$

Mit

$$b_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_4 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

ist $\{b_3, b_4\}$ (wegen $\langle b_3, b_4\rangle = 0$) eine ONB von $U^\perp$.

(b) Die Orthogonalprojektion von $x = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ auf $[u_1]$ ist

$$\frac{\langle x, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe 4

(a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(In den Spalten von A stehen $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ und $\varphi(e_3)$.)

(b) Eine reelle (bzw. komplexe) Zahl λ ist <u>Eigenwert</u> von $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, falls es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt, für den

$$Av = \lambda \cdot v$$

gilt. (Man nennt dann v einen Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.)

(c) Berechnung der Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-\lambda^2 + 4)$$

$$= -(4-\lambda)(2-\lambda)(2+\lambda)$$

Die Eigenwerte von A sind damit $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

Wegen $\det A = p(0) \neq 0$ ist A invertierbar.

Aufgabe 5

(a) Es ist

$$\partial_y V_1(x,y) = 2xy + e^y(x^2+1)$$
$$\partial_x V_2(x,y) = 4xy + e^y$$

und es gilt

$$\partial_y V_1(x,y) = \partial_x V_2(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2xy + e^y(x^2+1) = 4xy + e^y$$
$$\Leftrightarrow \quad e^y x^2 = 2xy$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung nicht überall in $(0,3)\times(0,3)$ erfüllt (z.B. nicht für $x = y = 1$).

Somit ist V auch kein Gradientenfeld

(b)

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3 \\ 3y^2-12 \end{pmatrix}, \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=0 \text{ und } y^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \text{ und } y = \pm 2$$

Nur der Punkt $P = (1,2)$ liegt im Def. bereich.

$H_f(P) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist pos. definit. Somit ist P ein lokales Minimum.

Aufgabe 6

(a) Der Ansatz $f(x) = e^{rx}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $r \in \mathbb{C}$ führt auf die Gleichung

$$4r^2 \cdot e^{rx} - r e^{rx} - 3 e^{rx} = 0,$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ nur erfüllt ist, wenn

$$4r^2 - r - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - \frac{1}{4} r - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{48}{64}} = \frac{1}{8} \pm \frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1 = 1 \quad \text{oder} \quad r_2 = -\frac{3}{4}$$

Somit bilden die Funktionen

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-\frac{3}{4}x}$$

ein Fundamentalsystem der gegebenen DGL.

(b) Einsetzen ergibt:

$$4(-a \cdot \cos x - b \cdot \sin x) - (-a \cdot \sin x + b \cos x) - 3(a \cos x + b \sin x) = 10 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (-4a - b - 3a) \cos x + (-4b + a - 3b) \sin x = 10 \cdot \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7a + b = 0, \quad a - 7b = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -7a, \quad a + 49a = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{7}{5}$$

$f(x) = \frac{1}{5} \cos x - \frac{7}{5} \sin x$ ist somit eine Lösung von (1).

(c) Die allgemeine Lösung von (1) ist

$$\tilde{f} := f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7

(a) Ansatz zur Lösung von (2):

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot v \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{R}^2$$

Laut Vorlesung ist $x(t)$ nur Lösung von (2), wenn λ EW von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ ist.
Wir bestimmen also die EW von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$ die EW von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Die zugehörigen Eigenvektoren erfüllen

(für λ_1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} v = 0$ bzw. (für λ_2) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot v = 0$

Sind also z. B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die allg. Lsg. von (2) ist somit

$$x(t) = \alpha_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Setzt man die Bedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad 6 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

Also ist

$$x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die Lsg. des Anfangswertproblems.