Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Daniel Hug
Dr. Steffen Winter

29. September 2009

Nachklausur zur Vorlesung

Mathematik II für die Fachrichtungen Biologie und Chemie

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung: Semester:

Zur Bearbeitung: Die Klausur dauert **90 Minuten**. Verwenden Sie für **jede Aufgabe** ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes verwendete Blatt Ihren Namen und die Aufgabennummer. Füllen Sie vor der Abgabe das Deckblatt aus und legen Sie die von Ihnen beschriebenen Blätter hinein. Begründen Sie alles, was Sie tun. Wenn Sie Sätze aus der Vorlesung anwenden, zitieren Sie diese genau.

Zahlenresultate wie $\ln(1+\pi)$ oder $\frac{25^{17}}{42!}$ sind als Endergebnis akzeptabel.

Es sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

Zur Auswertung: Jede der sieben Aufgaben hat einen Wert von 10 Punkten. Die Klausur ist bestanden, wenn Sie mindestens 25 der insgesamt 70 Punkte erreichen.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$	**Note**
Punkte									

Aufgabe 1. Lineare Unabhängigkeit, Linearkombination

(a) Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie alle Linearkombinationen der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 an, die den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Aufgabe 2. Basis, Dimension, Untervektorraum

(a) Sei V ein reeller Vektorraum. Definieren Sie die Begriffe *Basis* und *Dimension* von V. Sind Basis von V beziehungsweise Dimension von V eindeutig bestimmt?

(b) Zeigen Sie, dass

$$U := \{f \in C^2(\mathbb{R}) : f''(x) + 4f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}\}$$

ein Untervektorraum des Vektorraums $C^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3. Orthonormalisierung

Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

(b) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$.

Aufgabe 4. Lineare Abbildungen, Eigenwerte

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix A zu φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Definieren Sie den Begriff des Eigenwertes einer quadratischen Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(c) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A. Ist A invertierbar?

Aufgabe 5. Vektorfeld, Gradientenfeld, Extremwerte

(a) Erfüllt das Vektorfeld

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 + e^y(x^2+1) \\ 2yx^2 + xe^y \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

die Integrabilitätsbedingungen? Ist V ein Gradientenfeld?

(b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y, \quad x \in (0,3), y \in (0,3)$$

auf lokale Maxima und Minima.

Aufgabe 6. Differentialgleichungen

(a) Ermitteln Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$4f''(x) - f'(x) - 3f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a\cos x + b\sin x$ die Differentialgleichung

$$4f''(x) - f'(x) - 3f(x) = 10\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

löst.

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung von (1)?

Aufgabe 7. Differentialgleichungssystem, Anfangswertproblem

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ des linearen Differentialgleichungssystems

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(b) Geben Sie die Lösung von Gleichung (2) mit $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ an.