1. Produktionsplanung

Produkte $P_1, \dots, P_n$

Hilfsmittel $H_1, \dots, H_m$

Eine Einheit von P_k benötigt $a_{jk} \geq 0$ Einheiten von H_j, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$.

b_j = vorhandene Gesamtmenge von H_j, $j = 1, \dots, m$

p_k = Gewinn bei Verkauf von P_k pro Einheit, $k = 1, \dots, n$

x_k = Menge von P_k, die hergestellt wird, $k = 1, \dots, n$.

Ziel: Maximiere Gesamtgewinn

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \leq b_j \, , \quad j = 1, \dots, m$$

Vorzeichenbedingungen: $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$

$\longrightarrow$ Lineares Programm

2. Mischungsproblem

Nahrungsmittel aus Zutaten $P_1, \dots, P_n$

Zutaten enthalten Grundstoffe $H_1, \dots, H_m$

a_{jk} = Anteil von H_j in P_k

p_k = Preis von P_k (pro Einheit)

b_j = Mindestmenge von H_j, die im Nahrungsmittel vorhanden sein soll

x_k = Anteil von P_k im Nahrungsmittel

Ziel: Minimiere Kosten

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \geq b_j \quad , j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

Vorzeichenbedingungen: $x_k \geq 0, \; k = 1, \dots, n$

$\longrightarrow$ Lineares Programm

3. Zuordnungsproblem

N Posten $\quad 1, \ldots, N$

M Bewerber $\quad 1, \ldots, M$

a_{jk} = Qualifikation von Bewerber j für Posten k

Ziel: Besetze Posten so, dass Gesamtqualifikation maximal

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls Bewerber } j \text{ erhält Posten } k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe: Maximiere

$$f(x_{11}, \ldots, x_{MN}) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} a_{jk} x_{jk}$$

Restriktionen:

$$\sum_{j=1}^{M} x_{jk} \leq 1 \quad , k = 1, \ldots, N \quad \text{(höchstens ein Bewerber erhält Posten } k\text{)}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_{jk} \leq 1 \quad , j = 1, \ldots, M \quad \text{(höchstens ein Posten für Bewerber } j\text{)}$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\} \quad , k = 1, \ldots, N, \; j = 1, \ldots, M$$

$\rightarrow$ Ganzzahlige Optimierung

4. Transportproblem

m Lager
n Verteiler
j-ter Verteiler benötigt b_j Einheiten
i-tes Lager hat a_i Einheiten

Annahme
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

c_{ij} = Transportkosten von i nach j (pro Einheit)

Gesucht $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ (oder $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

mit minimalem
$$f(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Nebenbedingungen:
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , \quad i = 1, \dots, m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$\longrightarrow$ LP / Ganzzahl. Opt.

5. Netzwerkproblem

Knotenmenge $K = \{1, \dots, n\}$

Startknoten 1, Zielknoten n

Bogenmenge $B = \{(i,j) :$ gewisse Paare $i,j \in K$ mit $i \neq j\}$

$(i,1) \notin B, \ (n,j) \notin B$

x_{ij} = Fluß längs Bogen (i,j)

Ziel: Maximiere

$$\sum_{(1,j)\in B} x_{1j} \qquad \left(= \sum_{(i,n)\in B} x_{in} \right)$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{i:(i,j)\in B} x_{ij} = \sum_{k:(j,k)\in B} x_{jk} \quad , \ j = 2, \dots, n-1$$

$x_{ij} \le c_{ij}$ (vorgegebene Kapazität des Bogens $(i,j)\in B$)

$\longrightarrow$ LP

6. Preiskalkulation

Supermarkt mit n Waren $W_1, \dots, W_n$

b_i = Menge von W_i am Lager

x_i = Preis von W_i (pro Einheit)

$g_i(x_1, \dots, x_n)$ = Einheiten von W_i, die verkauft werden, $i = 1, \dots, n$

Ziel: Wähle Preise x_i so, dass Gesamterlös

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x_1, \dots, x_n) \cdot x_k$$

maximal ist!

Nebenbedingungen:

$$g_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k \ , \ k = 1, \dots, n$$

$$x_k \geq c_k \ , \ k = 1, \dots, n$$ (vorgeschriebene Mindestpreise)

⟶ Nichtlineare Optimierung

(falls g_k linear ⟹ NB'en linear, Zielfunktion quadratisch
⟶ Quadratisches Programm)