Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Weil
Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

2. Übungsblatt – Sommersemester 2009

5. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien $f_1, \ldots, f_k$ Linearformen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Weiter sei $M := \bigcap_{i=1}^k \{f_i \leq \alpha_i\} \subset \mathbb{R}^n$ eine polyedrische Menge. Für $i = 1, \ldots k$ definieren wir $F_i := M \cap \{f_i = \alpha_i\}$. Die nichtleeren F_i und die nichtleeren endlichen Durchschnitte der F_i heißen Seiten von M.

Zeigen Sie:

(a) Die Definition der Seiten von M ist unabhängig von der Darstellung von M.

Hinweis: Zeigen Sie die folgende Aussage: Besitzt M eine weitere Darstellung

$$M = \bigcap_{j=1}^{m} \{g_j \leq \beta_j\}$$

mit Linearformen $g_1, \ldots, g_m$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, so existiert für alle nichtleeren Mengen F_i, $i = 1, \ldots, k$, eine nichtleere Indexmenge $J_i \subset \{1, \ldots, m\}$ mit

$$F_i = M \cap \bigcap_{j \in J_i} \{g_j = \beta_j\}.$$

(b) Jede Seite von M ist polyedrisch.

(c) Ist F eine Seite von M und F' eine Seite von F, so ist F' auch Seite von M.

(d) Sind F und F' Seiten von M und $F' \subset F$, so ist F' Seite von F.

6. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine polyedrische Menge. Weiter sei $s \subset M$ ein Strahl, d.h. es gibt ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und einen Einheitsvektor u^0 mit

$$s = \{x^0 + \beta u^0 \, : \, \beta \geq 0\}.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Der Strahl s ist ein Extremalstrahl, d. h. eine eindimensionale Seite, von M.

(ii) Für alle $x \in s$, für alle $y, z \in M$ und für alle $\alpha \in (0, 1)$ mit $x = \alpha y + (1 - \alpha) z$ folgt $y, z \in s$.

7. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kegel*, wenn mit jedem $x \in M$ und $\alpha \geq 0$ auch $\alpha x \in M$ gilt. Beweisen Sie: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, geradenfrei und polyedrisch, so gilt

$$M \text{ ist ein Kegel} \iff \operatorname{vert} M = \{0\}.$$

8. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Kegel V heißt *endlich erzeugt*, wenn es $m \in \mathbb{N}$ und Vektoren $y^1, \ldots, y^m \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$V = \{\beta_1 y^1 + \ldots + \beta_m y^m \,:\, \beta_1, \ldots, \beta_m \geq 0\}.$$

Es sei $V \neq \emptyset$ ein endlich erzeugter und geradenfreier Kegel. Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Halbraum $\{f \geq 0\}$ existiert mit

$$V \subset \{f \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad V \cap \{f = 0\} = \{0\}.$$

Zusatzaufgabe (keine Abgabe)

Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wieder kompakt ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 und eine Argumentation, die sich an den Beweis von Satz (2.2) aus der Vorlesung anlehnt.

ABGABE bis Dienstag, den 05. Mai 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.