Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Weil
Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

3. Übungsblatt – Sommersemester 2009

9. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das Lineare Programm

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f &=& \max \\ Ax &=& b \\ x &\geq& 0 \end{array}}$$

mit der $m \times n$–Matrix A vom Rang k. Zeigen Sie: Ist x ein zulässiger Punkt dieses LP, so gibt es einen zulässigen Punkt y mit höchstens $k+1$ positiven Komponenten und $f(x) = f(y)$.

10. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $A \neq 0$ eine reelle (m, n)-Matrix. Zeigen Sie:

a) $Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0$ lösbar $\Longleftrightarrow$ $A^{\mathsf{T}}u < 0$ unlösbar.

b) $Ax = 0, x > 0$ unlösbar $\Longleftrightarrow$ $A^{\mathsf{T}}u \leq 0, A^{\mathsf{T}}u \neq 0$ lösbar.

11. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein endlich erzeugter Kegel und

$$V^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \ : < x, y > \leq 0 \ \text{ für alle } y \in V\}$$

der *Dualkegel* von V. Zeigen Sie:

a) V° ist ein endlich erzeugter Kegel.

b) Es gilt $V^{\circ\circ} = V$.

12. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie:

a) Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein eindeutig bestimmter Punkt $y =: p(M,x) \in M$ mit

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| \quad \text{für alle } z \in M.$$

b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|p(M,x) - p(M,y)\| \leq \|x-y\|.$$

Bemerkung: Die Abbildung $x \mapsto p(M,x)$ heißt *metrische Projektion auf* M.

ABGABE bis Dienstag, den 12. Mai 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.