

Optimierungstheorie

4. Übungsblatt – Sommersemester 2009

13. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das DP

$$\begin{array}{rcccccc} 3u_1 & + & 6u_2 & + & 10u_3 & + & 9u_4 & + & 8u_5 & = & \min \\ -3u_1 & + & u_2 & + & u_3 & + & 3u_4 & + & u_5 & \geq & 6 \\ u_1 & + & 2u_2 & - & 6u_3 & + & 2u_4 & + & u_5 & \geq & 8 \\ & & & & & & u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 & \geq & 0. \end{array}$$

Finden Sie das PP und lösen Sie beide Programme.

14. Aufgabe (4 Punkte)

Es seien die reelle (m, n) -Matrix A , die reelle (k, n) -Matrix B und die Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^k$ und $p \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass für das LP

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \langle x, p \rangle = \max \\ Ax \leq b \\ Bx = c \\ x \geq 0 \end{array}}$$

das DP in der Form

$$\boxed{\begin{array}{l} g(u, v) = \langle b, u \rangle + \langle c, v \rangle = \min \\ A^T u + B^T v \geq p \\ u \geq 0 \end{array}}$$

mit $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^k$ geschrieben werden kann, und dass für jede Lösung x von LP und jede Lösung (u, v) von DP gilt:

$$\langle x, A^T u + B^T v - p \rangle = 0, \quad \langle u, b - Ax \rangle = 0.$$

15. Aufgabe (4 Punkte)

Verwenden Sie Aufgabe 14, um das duale Programm der Optimierungsaufgabe

$x + y + 3z = \max$
$x + y \leq 1$
$4x + z = 2$
$x, y, z \geq 0$

anzugeben. Lösen Sie beide Programme.

16. Aufgabe (4 Punkte)

Rudi Weizenkeim achtet auf seine Gesundheit und will sich gut ernähren. Er weiß, dass Folsäure gut fürs Blut, Phosphor gut für die Knochen und Alkohol gut fürs Gemüt ist. Er hat in der aktuellen Ausgabe der Zeitschrift „**Bier heute**“ gelesen, dass man täglich mindestens 8 mg Folsäure, 14 mg Phosphor und 125 mg Alkohol zu sich nehmen soll. Hingegen sollen die Gerbstoffe „Schlechtin“ und „Übelin“ vermieden werden, weil sie den Magen angreifen (max. 28 mg Schlechtin pro Tag und max. 12 mg Übelin pro Tag).

Da Rudi sich nur von Fertigpizza ernährt, die keinen dieser Stoffe enthält, untersucht er den Gehalt seiner Lieblingsbiere und kommt auf folgende Tabelle (Angaben in mg):

	Cauchy- Schwarzbier	Hilbert Urquell	Gaußthaler alkoholfrei
Folsäure	4	4	8
Phosphor	15	7	2
Alkohol	72	64	36
Schlechtin	2	26	4
Übelin	3	7	40
Preis	1,5	1,1	2,4

Der angegebene Preis (in Euro) bezieht sich auf einen Liter des jeweiligen Biers.

Formulieren Sie ein lineares Programm (LP), das die Kosten seines täglichen Bierkonsums minimiert, wenn Rudi alle Nebenbedingungen einhalten will. Stellen Sie das zugehörige Dualprogramm auf. Finden Sie durch Probieren¹ zulässige Punkte beider linearer Programme und schätzen Sie damit die optimale Lösung von (LP) so nach oben und unten ab, dass der Fehler weniger als einen halben Euro beträgt. (Sie können einen Taschenrechner verwenden.)

ABGABE bis Dienstag, den 19. Mai 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.

¹Dies ist *nicht* wörtlich zu nehmen!