UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Optimierungstheorie

5. Übungsblatt – Sommersemester 2009

17. Aufgabe (4 Punkte)
Leiten Sie aus dem Dualitätssatz das Lemma von Farkas her.

18. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben sei die polyedrische Menge

$$M := \bigcap_{i=1}^{k} \{\langle y^i, \cdot \rangle \leq \alpha_i\}$$

mit $\|y^1\| = \|y^2\| = \ldots = \|y^k\| = 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.

a) Gesucht ist der *Inkugelradius* $\rho(M)$ *von* M, d.h. ein maximales $\rho \geq 0$, so dass es einen Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $B_\rho(z) \subset M$. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm und bestimmen Sie das zugehörige Dualprogramm.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a):

$$\rho(M) \text{ ist endlich} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^k\}.$$

19. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^6 \,:\, Ax = b, x \geq 0\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 10 & -1 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es Ecken x von M mit $x_4 = x_5 = x_6 = 0$?

(b) Gibt es Ecken x von M mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$?

20. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Es seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$ gegeben. Betrachten Sie die zulässigen Bereiche

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b,\ x \geq 0\} \text{ und}$$

$$M' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, Ax + y = b,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

und zeigen Sie

(i) $(0,b)$ ist Ecke von M',

(ii) Ist (x,y) eine Ecke von M', so ist x eine Ecke von M.

(b) Finden Sie mit Hilfe von (a) eine nichtentartete Ecke des durch das folgende Ungleichungssystem gegebenen zulässigen Bereiches M:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & - & 4x_5 & \leq & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & \leq & 8 \\ -4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 5x_5 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

ABGABE bis Dienstag, den 26. Mai 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.