Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. W. Weil
Institut für Algebra und Geometrie Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

6. Übungsblatt – Sommersemester 2009

21. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Mensakoch steht vor folgendem kulinarischen Optimierungsproblem:
Vom Vortag sind 250 kg Nudeln, 150 kg Sauerbraten und 50 kg Schokoladenpudding übrig geblieben. Der örtliche Zoo nimmt bis zu 20 kg Schokoladenpudding und bis zu 100 kg Sauerbraten ab zum Kilopreis von 5,– Euro bzw. 4,– Euro. Außerdem kann der Mensakoch zur Verwertung der Reste in der *Schlemmerecke* das Gericht „Gaisburger Marsch“ anbieten (wozu pro Portion u.a. 100 g Nudeln und 100 g Sauerbraten benötigt werden) und, als besonderen Leckerbissen, „Soupe à la Chinoise, süß-sauer“. Für die letztere Köstlichkeit verwendet man u.a. je 50 g Nudeln, Sauerbraten und Schokoladenpudding. Der erzielte Reingewinn pro Portion beträgt beim „Gaisburger Marsch“ 2,– Euro und für die Chinesische Suppe 3,– Euro.
Wie viele Portionen wird der Koch, um seinen Gewinn zu maximieren, von jedem der beiden Gerichte anbieten und wieviel Schokoladenpudding und Sauerbraten verkauft er an den Zoo?

Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Programm und lösen Sie dieses.

22. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das Lineare Programm

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + x_5 = \max \\[1em] \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \\[1em] x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}}$$

Zeigen Sie, dass $x^0 = (\frac{7}{5}, 1, 0, \frac{1}{5}, 0)$ Ecke ist, und lösen Sie das LP mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

23. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie mit der 2–Phasen–Methode:

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} f & = & -3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & \min \\ & & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 6 \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,\, x_2,\, x_3, x_4} & \geq & 0. \end{array}}$$

24. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Gegeben seien die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, und der durch $Ax \geq b$, $x \geq 0$ gegebene zulässige Bereich M.

Durch Einführung von m Schlupfvariablen $y = (y_1, \ldots, y_m)$ erhält man den neuen zulässigen Bereich

$$M' = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Ax - y = b,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0\}.$$

Finden Sie eine Ecke von M mit Hilfe eines LP, dessen zulässiger Bereich aus M' durch Einführung *einer* weiteren Variablen entsteht.

(b) Benutzen Sie (a), um eine Ecke des durch

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \geq & 10 \\ & & \multicolumn{3}{r}{x_1,\, x_2,\, x_3} & \geq & 0 \end{array}$$

gegebenen zulässigen Bereichs M zu finden.

ABGABE bis Dienstag, den 2. Juni 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.