Universität Karlsruhe (TH) — Prof. Dr. W. Weil
Institut für Algebra und Geometrie — Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

7. Übungsblatt – Sommersemester 2009

25. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben sei das PP

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \min$$

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_5 \geq 3 & x_1 + x_4 \geq 4 & x_1 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_4 \geq 2 & x_2 + x_5 \geq 4 & x_2 + x_6 \geq 4 \\ x_3 + x_4 \geq 2 & x_3 + x_5 \geq 3 & x_3 + x_6 \geq 6 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass das DP ein Zuordnungsproblem ist und lösen Sie beide Programme.

26. Aufgabe (4 Punkte)
Das Eheanbahnungsinstitut "Hildegard" führt zur Zeit in seiner Kartei genau N Herren und ebenso viele Damen als Kunden. Frau Hildegard ist es durch ihren unermüdlichen Einsatz zu verdanken, dass inzwischen jeder der Herren mit genau m der Damen bekannt geworden ist und umgekehrt, dass jede Dame genau m der Herren kennt ($1 \leq m \leq N$). Sie versucht nun mittels des institutseigenen Partnercomputers einen Heiratsplan aufzustellen. Gelingt es ihr, für jeden Herren und für jede Dame einen Partner so zu finden, dass die künftigen Ehepaare sich schon vorher gekannt haben?
Formulieren Sie das Problem in geeigneter Weise als Zuordnungsproblem und zeigen Sie mit Hilfe des Dualitätssatzes, dass Frau Hildegard Erfolg haben wird.

27. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben sei ein Transportproblem mit m Lagern $A_1, \ldots, A_m$ und n Verbrauchern $B_1, \ldots, B_n$, wobei die Gesamtlagermenge $\sum_{i=1}^m a_i$ und der Gesamtbedarf $\sum_{j=1}^n b_j$ gleich sind.

Zeigen Sie, dass durch das folgende, "Nordwestecken–Regel" genannte Verfahren, eine Ecke des zulässigen Bereichs gefunden wird:
Lager A_1 versucht zunächst den Bedarf von B_1 voll zu befriedigen, d.h. $x_{11} := \min\{a_1, b_1\}$, danach den Bedarf von B_2, d.h. $x_{12} := \min\{a_1 - x_{11}, b_2\}$, dann den Bedarf von B_3 usw., bis das Lager leer ist. Anschließend versucht Lager A_2 den Restbedarf des von A_1 zuletzt belieferten Verbrauchers zu erfüllen und dann wieder der Reihe nach die Anforderungen der folgenden Verbraucher. Bezeichnen wir die so von Lager A_i an Verbraucher B_j gelieferte Menge mit x_{ij}, so ist $(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn})$ eine Ecke.

28. Aufgabe (4 Punkte)
Der Schwarzwald ist berühmt für seine Bollenhüte, sein Kirschwasser und seine Kuckucksuhren. Was die Kuckucksuhren betrifft: Es gibt im Schwarzwald gerade noch drei Kuckucksuhrenschnitzer, die diese vom Aussterben bedrohte Zunft praktizieren. Karl (A_1), der schon die Gicht hat, bringt es auf 4 Kuckucksuhren pro Jahr. Joseph (A_2), die große Nachwuchshoffnung, schafft 11 Uhren im Jahr, deren Qualität natürlich nicht an die der anderen heranreicht. Der 78–jährige Schorsch (A_3) kommt wegen seines hohen Alters nur noch auf 5 Uhren. Die Kuckucksuhren werden in Touristenläden in Trifels (B_1), Heidelberg (B_2) und bei Schloss Neuschwanstein (B_3) verkauft, pro Jahr 7, 6 bzw. 7 Stück. Die Transportkosten einer Uhr von A_i nach B_j seien d_{ij} (in Euro, sie sind wegen der verschiedenen Transportmittel nicht proportional zur Wegstrecke). Die Kostenmatrix $D = ((d_{ij}))$ lautet

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine kostenminimale Lösung dieses Transportproblems mit Hilfe des Simplexverfahrens.
Bestimmen Sie dafür zunächst eine Startecke mit der Nordwestecken–Regel (siehe die folgende Zusatzaufgabe).

ABGABE bis Dienstag, den 9. Juni 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.