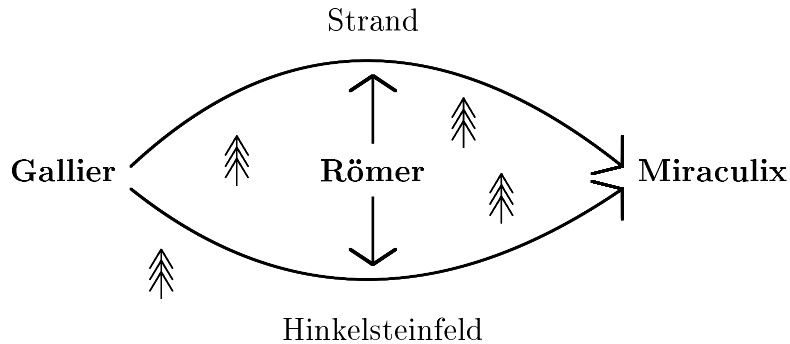
Universität Karlsruhe (TH) Prof. Dr. W. Weil
Institut für Algebra und Geometrie Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

10. Übungsblatt – Sommersemester 2009

37. Aufgabe (4 Punkte)
n Gallier (ohne Obelix) brauchen ihren Zaubertrank und wollen deshalb auf dem schnellsten Weg zu Miraculix. Sie können zwischen zwei Wegen wählen: Ein Weg führt über das Hinkelsteinfeld, der andere über den Strand. Die Gallier können sich beliebig auf beide Wege aufteilen, d.h. einige laufen über den Strand, der Rest über das Hinkelsteinfeld.



Im Wald zwischen den zwei Wegen sind $n+1$ Römer versteckt, die die Gallier aufhalten wollen. Auch sie können sich beliebig auf die zwei Wege aufteilen. Ist eine Gruppe der Gallier in der Überzahl, so erreichen diese Miraculix, und die Gallier haben gewonnen. Andernfalls siegen die Römer. Unter der Annahme, dass die Gegner ihre Gruppenaufteilungen unabhängig voneinander entscheiden, finde man optimale Strategien für Gallier und Römer. Für welche n haben die Gallier bessere Gewinnchancen?

Hinweis: Stellen Sie die Auszahlungsmatrix für die Römer auf, wobei die Römer, falls sie gewinnen, die „Auszahlung" 1 bekommen, andernfalls die „Auszahlung" 0. Zeigen Sie, dass der „Wert" des Spiels positiv ist, und lösen Sie die zugehörigen linearen Programme für gerade und ungerade n getrennt.

38. Aufgabe(4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f^+(t)\,dt = \int_0^x f^-(t)\,dt$$

gilt.

39. Aufgabe(4 Punkte)
Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\partial f(x) := \{v \in \mathbb{R}^n \;:\; f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle \;\forall y \in \mathbb{R}^n\},$$

das *Subdifferential* von f an der Stelle x. Beweisen Sie:

(a) $\partial f(x)$ ist konvex und kompakt.

(b) Es gilt
$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle v, u\rangle \leq f'(x; u) \;\; \forall u \in \mathbb{R}^n,\, u \neq 0\}.$$

(c) Ist f differenzierbar in x, so gilt $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

40. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.
Beweisen Sie: f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0.$$

Zusatzaufgabe (**Ohne Korrektur**)

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x \in \mathbb{R}^n$.
Beweisen Sie: Existieren alle partiellen Ableitungen von f an der Stelle x, so ist f in x differenzierbar.

ABGABE bis Dienstag, den 30. Juni 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1.