Universität Karlsruhe (TH) — Prof. Dr. W. Weil
Institut für Algebra und Geometrie — Dipl.-Math. oec. M. Hörig

Optimierungstheorie

11. Übungsblatt – Sommersemester 2009

41. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie: Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das Supremum der affinen Funktionen g mit $g \leq f$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(x) = \sup\{g(x) \,:\, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ affin}, \; g \leq f\}.$$

42. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben sei das konvexe Programm

$$(KP) \qquad \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \min \\ g_i(x) & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ x & \geq & 0 \end{array}}$$

mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f, g_1, \ldots, g_m$ und eine Lösung x^0 von (KP). Zeigen Sie, dass die Lösungen von (KP) genau die zulässigen Punkte x sind, die die Bedingungen

$$\nabla f(x) = \nabla f(x^0) \qquad \text{und} \qquad \langle x - x^0, \nabla f(x^0) \rangle = 0$$

erfüllen.

43. Aufgabe (4 Punkte)
Gegeben sei das konvexe Programm

$$(KP) \qquad \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \min \\ g_i(x) & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}}$$

wobei f stetig partiell differenzierbar ist. Ist $x^0 \in M := \{g_i \leq 0 \,:\, i = 1, \ldots, m\}$, so verstehen wir unter einer *zulässigen Richtung in* x^0 jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $\| \, v \, \| = 1$, mit den folgenden zwei Eigenschaften:

$$\sup\{\alpha \,:\, x^0 + \alpha v \in M\} > 0 \qquad \text{und} \qquad \langle v, \nabla f(x^0) \rangle < 0.$$

Zeigen Sie: Ein zulässiger Punkt x^0 ist genau dann Lösung von (KP), wenn es in x^0 keine zulässigen Richtungen gibt.

44. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie

(a) den *Stützsatz*:
Zu jedem $x \in \operatorname{bd} A$ existiert eine Stützhyperebene, d.h. eine Hyperebene H, die x und die Menge A trennt.

(b) den *Satz von Minkowski*:
Ist A kompakt, so gilt $A = \operatorname{conv} \operatorname{ext} A$.

ABGABE bis Dienstag, den 7. Juli 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfkasten im (alten) Kollegiengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1.