

## Optimierungstheorie

### 12. Übungsblatt – Sommersemester 2009

#### 45. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} f &= -(x+1)^a(y+1)^b = \min \\ x+2y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

mit  $a, b > 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  für  $a+b \leq 1$  auf dem Bereich  $\{(x, y) \geq 0\}$  konvex ist.
- (b) Beweisen Sie, dass für diese  $a, b$ , wobei zusätzlich  $b < 4a < 6b$  gelte,

$$(x^0, y^0) = \left( \frac{4a-b}{a+b}, \frac{3b-2a}{2(a+b)} \right)$$

eine Lösung des entsprechenden konvexen Programms ( $KP$ ) ist. Bestimmen Sie dazu ein  $u^0 \geq 0$  derart, dass  $(x^0, y^0, u^0)$  Sattelpunkt der Lagrangefunktion in  $\{(x, y) \geq 0, u \geq 0\}$  ist.

#### 46. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das konvexe Programm

$$(KP) \quad \begin{array}{l} f = \min \\ g_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0. \end{array}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Slater-Bedingung ( $SB$ ) für ( $KP$ ) ist äquivalent zur Bedingung ( $SB^*$ ):  
Zu jedem  $i \in \{1, \dots, m\}$  existiert ein zulässiger Punkt  $x^i$  mit  $g_i(x^i) < 0$ .
- (b) Die Slater-Bedingung ( $SB$ ) ist äquivalent zur Bedingung ( $K$ ):  
Zu jedem Punkt  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \geq 0$ ,  $u \neq 0$  gibt es ein  $x \geq 0$  mit  $\langle u, g(x) \rangle < 0$ .

**47. Aufgabe** (4 Punkte)

Gegeben sei das konvexe Programm

$$(KP) \quad \begin{array}{l} f = \min \\ g_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

mit konvexen Funktionen  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Formulieren Sie für dieses Programm eine „Slater-Bedingung“ und beweisen Sie einen „Sattelpunkt-Satz“, der dem Satz von Kuhn-Tucker entspricht.

**48. Aufgabe** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{l} 2(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = \min \\ x^2 + y^2 \leq 25 \\ e^{-x} - y \leq 1 \\ -x - y \leq -3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

ein konvexes Programm ist und lösen Sie dieses graphisch unter Verwendung der lokalen Kuhn-Tucker Bedingungen.

*Hinweis:* Prüfen Sie die Slater-Bedingung nach und verwenden Sie, dass der Vektor  $u^0$  in den lokalen Kuhn-Tucker Bedingungen hier Norm eins hat.

**ABGABE** bis Dienstag, den 14. Juli 2009, 11:30 Uhr in den gekennzeichneten Einwurfbüchsen im (alten) Kollegengebäude Mathematik, 3. OG, neben Zimmer 328.1.