Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Weil

21. September 2009

Klausur Optimierungstheorie

Sommersemester 2009

Bitte in Druckschrift ausfüllen:

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung:

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die **Nummer der Aufgabe** sowie **Ihren Namen** schreiben.
Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie die Sätze genau. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Zur Auswertung: Jede der 5 Aufgaben wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Zum Bestehen sind 17 Punkte hinreichend.

Punkte						
1	2	3	4	5	Σ	**Note**

(Bitte nicht ausfüllen!)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei K eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ein Vekor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *freie Richtung* für K, wenn es ein $x \in K$ gibt mit $x + \lambda v \in K$ für alle $\lambda \geq 0$. Die Menge aller solcher freien Richtungen für K bezeichnen wir mit K_∞. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) K_∞ ist ein konvexer Kegel.

b) Für eine freie Richtung $v \in K_\infty$ gilt:

$$y + \lambda v \in K \text{ für alle } y \in K \text{ und alle } \lambda \geq 0.$$

c) K ist genau dann kompakt, wenn $K_\infty = \{0\}$ gilt.

d) Für eine polyedrische Menge $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ gilt

$$P_\infty = \{v \in \mathbb{R}^n : Av \leq 0\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $A = -A^\top$ eine schiefsymmetrische $n \times n-$ Matrix und $b, c \in \mathbb{R}^n$ und $b = -c$. Gegeben sei das lineare Programm

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \langle c, x \rangle = \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}} \quad (P)$$

mit zulässigem Bereich M.

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige duale Programm äquivalent zu (P) ist.

b) Zeigen Sie: Falls $M \neq \emptyset$, so ist (P) lösbar mit zugehörigem Minimalwert 0.

c) Geben Sie ein (LP) der Form

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{array}} \quad (LP)$$

mit $A \neq 0$ und der Eigenschaft an, dass weder (LP) noch sein duales Programm zulässige Punkte besitzen. Begründen Sie Ihre Wahl !

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Es sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A = (a^1 \vdots a^2 \vdots \cdots \vdots a^n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{A} = (\tilde{a}^1 \vdots \tilde{a}^2 \vdots \cdots \vdots \tilde{a}^{m+n}) = (E_m \vdots A)$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ und $\tilde{M} = \{y \in \mathbb{R}^{m+n} : \tilde{A}y = b\}$.

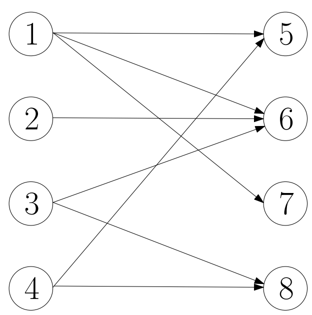
   Zeigen Sie, dass $x \in M$ genau dann Ecke von M ist, wenn $y := y(x) := (0, x) \in \tilde{M}$ Ecke von $\tilde{M}$ ist.

b) Verwenden Sie die Zwei-Phasen Methode, um zunächst eine Ecke und anschließend eine Lösung des folgenden linearen Programms zu finden:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = \min \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 8\}$ und (gerichteter) Kantenmenge $E = \{(1,5), (1,6), (1,7), (2,6), (3,6), (3,8), (4,5), (4,8)\} \subset V \times V$ (siehe Grafik).



Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem:

Gesucht ist die Menge $E^* \subset E$ mit maximaler Kardinalität, unter der Bedingung dass jeder Knoten aus V höchstens zu einer Kante aus E^* inzident sein darf.

a) Formulieren Sie dieses Problem als Zuordnungsproblem.

b) Stellen Sie das Optimierungsproblem (graphisch) als Netzwerkflussproblem dar, indem Sie zusätzlich einen Anfangsknoten A und einen Endknoten E einführen und die Kapazitäten für alle Knoten gleich 1 setzen. Lösen Sie dieses Netzwerkflussproblem unter Verwendung des Markierungsalgorithmus, beginnend mit dem Startfluss

$$A \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} E.$$

   Wie lautet die zugehörige Lösung des Optimierungsproblems?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y) = (x - \frac{9}{4})^2 + (y-2)^2 = \min \\ \\ -x^2 + y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ x, y \geq 0. \end{array}}$$

a) Zeigen Sie, dass es sich dabei um ein konvexes Programm (KP) handelt. Formulieren Sie für dieses die Slater-Bedingung und zeigen Sie, dass diese erfüllt ist.

b) Formulieren Sie die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen für (KP) und zeigen Sie, dass diese im Punkt $(x^0, y^0) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ erfüllt sind.
Was folgt daraus für die Lösbarkeit von (KP)?