Lösungen zum 1. Übungsblatt Optimierungstheorie SS09

1. Aufgabe

i) **Zielfunktion:** $-x_1 + x_2 + 2x_3 = \max$

ii) **Nebenbedingung:** Einführen von Schlupfvariablen y_1, y_2:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & y_1 & & & = & 1, \qquad y_1 \geq 0 \\
x_1 & & & - & x_3 & + & & + & y_2 & = & 1, \qquad y_2 \geq 0
\end{array}
$$

iii) **Vorzeichenbedingungen:**

$$
\begin{array}{ll}
x_2 = x_2^+ - x_2^-, & \qquad x_2^+ \geq 0,\ x_2^- \geq 0, \\
x_3 = x_3^+ - x_3^-, & \qquad x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,
\end{array}
$$

Zusammenfassend erhalten wir

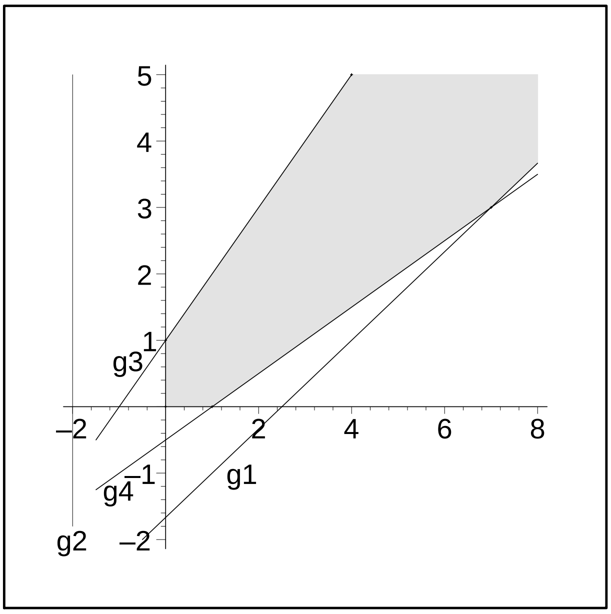
$$
\boxed{
\begin{array}{c}
-x_1 + x_2^+ - x_2^- + 2x_3^+ - 2x_3^- \quad = \quad \max \\[1em]
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\[1em]
x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0
\end{array}
}
$$

2. Aufgabe

Die Nebenbedingung mit Gleichheit $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \iff x_3 = 1 - x_1 + 2x_2$ erlaubt es, x_3 zu eliminieren. Beachte, dass wir in der Zielfunktion konstante Terme weglassen können ohne die Lösungsmenge zu ändern und dass $x_3 \geq 0$ zu einer neuen Nebenbedingung führt. Das resultierende LP lautet

$$
(\widetilde{LP}) \quad
\boxed{
\begin{array}{rcccccr}
\tilde{f}(x) := -x_1 & + & \beta x_2 & = & \max & & \\[0.5em]
2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 5 & & (1) \\
-x_1 & & & \leq & 2 & & (2) \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & & (3) \\
x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 & & (4) \\
& & x_1,\ x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}
}
$$

Jede Neben- und Vorzeichenbedingung entspricht einer abgeschlossenen Halbebene. Der zulässige Bereich $\widetilde{\mathcal{M}}$ von $(\widetilde{LP})$ ist der Schnitt dieser Halbebenenen.



Es gilt: $(\widetilde{LP})$ ist lösbar $\iff$ $\exists$ Ecke e von $\widetilde{\mathcal{M}}$ mit $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \{\tilde{f} \leq \tilde{f}(e)\}$.
Wir unterscheiden die folgenden Fälle und geben jeweils die Lösungsmengen $\widetilde{\mathcal{L}}$ und $\mathcal{L}$ von $(\widetilde{LP})$ und (LP) an.

$$\beta < 0 \iff \widetilde{\mathcal{L}} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \iff \mathcal{L} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\beta = 0 \iff \widetilde{\mathcal{L}} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \iff \mathcal{L} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}]$$

$$0 < \beta < 1 \iff \widetilde{\mathcal{L}} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \iff \mathcal{L} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

$$\beta = 1 \iff \widetilde{\mathcal{L}} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \geq 0\}$$

$$\iff \mathcal{L} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \geq 0\}$$

$$\beta > 1 \iff \widetilde{\mathcal{L}} = \emptyset \iff \mathcal{L} = \emptyset.$$

3. Aufgabe: Satz von Radon

Betrachte das homogene LGS

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_k x^k &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Es besteht aus $n+1$ Gleichungen und hat nach Voraussetzung $k > n+1$ Unbekannte. Also existiert eine nichttriviale Lösung $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*)$. Setze

$$I_+ := \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \alpha_i^* \geq 0\}, \qquad I_- := \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \alpha_i^* < 0\}.$$

Es gilt offensichtlich $I_+ \cup I_- = \{1, \ldots, k\}$, $I_+ \cap I_- = \emptyset$, und weil die Lösung nichttrivial ist, außerdem $I_+ \neq \emptyset \neq I_-$. Für die Mengen von Vektoren $A_+ := \{x^i : i \in I_+\}$ und $A_- := \{x^i : i \in I_-\}$ gilt daher $A_+ \cup A_- = A$ und $A_+ \cap A_- = \emptyset$. Es bleibt zu zeigen, dass sich die konvexen Hüllen von A_+ und A_- treffen. Die Gleichungen $(*)$ für die obige Lösung schreiben sich nun

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in I_+} \alpha_i^* x^i &= \textstyle\sum_{i \in I_-} (-\alpha_i^*) x^i \\ \alpha^* := \textstyle\sum_{i \in I_+} \alpha_i^* &= \textstyle\sum_{i \in I_-} (-\alpha_i^*) \qquad (>0 \ !). \end{aligned}$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch α^*, so erhalten wir

$$y := \underbrace{\sum_{i \in I_+} \frac{\alpha_i^*}{\alpha^*} x^i}_{\in \text{ conv} A_+} = \underbrace{\sum_{i \in I_-} \frac{-\alpha_i^*}{\alpha^*} x^i}_{\in \text{ conv} A_-} \in \text{conv} A_+ \cap \text{conv} A_-,$$

d.h. $\text{conv} A_+ \cap \text{conv} A_- \neq \emptyset$.

4. Aufgabe

Satz von Carathéodory: „Für jedes $x \in \text{conv} M \subset \mathbb{R}^n$ ex. ein Simplex S der x enthält und dessen Ecken in M liegen.“

Sei $x \in \text{conv} M \quad \Rightarrow x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a^i$ mit $a^i \in M, \alpha_i \geq 0, k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Wir nehmen dabei an, dass k minimal ist, d.h. x lässt sich nicht durch eine Konvexkombination mit weniger als k Punkten aus M darstellen; (insbesondere folgt daraus $\alpha_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$).
Wir zeigen, dass $a^1, \ldots, a^k$ affin unabhängig sind.

1. Fall $\dim \text{aff}\{a^1, \ldots, a^k\} = n$

z.z. $k \leq n+1$ (denn dann sind $a^1, \ldots, a^k$ affin unabhängig)

Annahme: $k \geq n+2$
Wie in Aufgabe 3 erhalten wir nun reelle Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ von denen mindestens eine von 0 verschieden ist, die

$$\begin{aligned} \beta_1 a^1 + \beta_2 a^2 + \ldots + \beta_k a^k &= 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Sei nun $I_+ := \{i \in \{1, 2, \ldots, k\} : \beta_i > 0\}$. Wir wählen dann $i_0 \in I_+$ so, dass

$$\frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} = \min_{i \in I_+} \frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Damit ist dann

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} \beta_i) a^i$$

mit $\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} \beta_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} \beta_i) = 1$. Zudem ist aber $\alpha_{i_0} - \frac{\alpha_{i_0}}{\beta_{i_0}} \beta_{i_0} = 0$, was der Minimalität von k in der Annahme widerspricht.

2. Fall $\dim \operatorname{aff}\{a^1, \ldots, a^k\} < n$

Wende den ersten Fall auf die Menge $\tilde{M} := M \cap \operatorname{aff}\{a^1, \ldots, a^k\}$ im Raum $\operatorname{aff}\{a^1, \ldots, a^k\}$ an.