Musterlösungen zum 2. Übungsblatt
Optimierungstheorie SS09

7. Aufgabe

Es sei $M \neq \emptyset$ polyedrisch und geradenfrei.
z.z. M ist ein Kegel $\iff$ $\operatorname{vert} M = \{0\}$.

"$\Rightarrow$" Sei M ein Kegel. Z.z. $\operatorname{vert} M = \{0\}$.

Wegen $M \neq \emptyset$ polyedrisch, geradenfrei $\Rightarrow$ $\operatorname{vert} M \neq \emptyset$ (Satz 2.2). Sei $x \in \operatorname{vert} M$. Wenn $x \neq 0$ wäre, so wäre $x \in [0, 2x] \subset M$ (M Kegel), aber $0 \neq x \neq 2x$. Somit wäre x kein Extremalpunkt, ein Widerspruch!

"$\Leftarrow$" Sei $\operatorname{vert} M = \{0\}$.

$M \neq \emptyset$ ist polyedrisch und geradenfrei, nach Satz 2.9 ist M konvexe Hülle seiner Ecken und Extremalstrahlen:

$$M = \operatorname{conv}(\{0\} \cup \operatorname{exh} M). \qquad (*)$$

Da die Menge $\{0\}$ ein Kegel ist, können wir $M \neq \{0\}$ annehmen, also ist $\operatorname{exh} M \neq \emptyset$.
Sei $s \in \operatorname{exh} M$, $s = \{x^0 + \beta y^0 \mid \beta \geq 0\}$, $x^0,\ y^0 \in \mathbb{R}^n, y^0 \neq 0$.

$$\begin{aligned} x^0 \in \operatorname{vert} s \quad &\Rightarrow \quad x^0 \text{ ist 0-Seite von } s \qquad \text{(Satz 2.6)} \\ &\Rightarrow \quad x^0 \text{ ist 0-Seite von } M \qquad \text{(Aufgabe 5c)} \\ &\Rightarrow \quad x^0 \in \operatorname{vert} M = \{0\} \qquad \text{(Satz 2.6)} \\ &\Rightarrow \quad s = \{\beta y^0 \mid \beta \geq 0\}. \end{aligned}$$

d.h. alle Extremalstrahlen beginnen im Ursprung und $(*)$ wird zu $M = \operatorname{conv}(\operatorname{exh} M)$.
$s_1, \ldots, s_k$ seien die Extremalstrahlen von M.

Für $x \in M$ und $\alpha \geq 0$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y^i,\ \ y^i \in s_i,\ \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

und

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{(\alpha y^i)}_{\in s_i} \in \operatorname{conv}(\operatorname{exh} M) = M.$$

Also ist M ein Kegel.

8. Aufgabe

In der Darstellung

$$V = \{\beta_1 y^1 + \ldots + \beta_m y^m \,|\, \beta_1, \ldots, \beta_m \geq 0\}$$

können wir $y^1, \ldots, y^m \neq 0$ annehmen. Wir definieren $M := \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^m\}$.
Dann ist $0 \notin M$. (Denn aus $0 \in M$ folgt o.B.d.A.

$$x^1 = -\beta_2 x^2 - \ldots - \beta_k x^k, \quad \beta_i \geq 0$$

$\Rightarrow \ -x^1 \in V \ \Rightarrow$ Gerade durch $\{-x^1, x^1\}$ liegt in V und dies ist ein Widerspruch.)

Sei $x^0 \in M$ mit $\|x^0\| = \min_{y \in M} \|y\| \ \Rightarrow x^0 \neq 0$ und setze $f = \langle x^0, \cdot \rangle$.
Dann ist $f(z) > 0$ für alle $z \in M$. (Andernfalls, d.h. falls es ein $z \in M$ mit $f(z) \leq 0$ gäbe, so wäre $[z, x^0] \subset M$, und dies wäre ein Widerspruch zur Minimalität von x^0.)
Also folgt $V = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha M \subset \{f \geq 0\}$ und $V \setminus \{0\} = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha M \subset \{f > 0\}$ und daraus die Behauptung.

Zusatzaufgabe

Aus der Beschränktheit von M folgt, dass auch $\operatorname{conv} M$ beschränkt ist. Gilt nämlich, dass $M \subset B(r)$ für ein $r > 0$, so ist auch $\operatorname{conv} M \subset B(r)$. Zu zeigen bleibt, dass $\operatorname{conv} M$ abgeschlossen ist.

Es ist

$$\text{conv } M = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, x^i \in M\}.$$

Nach dem Satz von Carathéodory (Aufgabe 4) gilt sogar

$$\operatorname{conv} M = \{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i : \alpha_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, x^i \in M\}. \quad (*)$$

Sei nun $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{conv} M$ mit $\lim_{j \to \infty} y_j = y$. Wegen $(*)$ hat also jedes y_j eine Darstellung der Gestalt

$$y_j = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{j,i} x^{j,i}.$$

Wegen der Kompaktheit von M und $[0,1]$ finden wir eine Teilfolge $(j_l)_{l \in \mathbb{N}}$, so dass jede der $2n+2$ Teilfolgen $(x^{j_l,i})_{l \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n+1$ und $(\alpha_{j_l,i})_{l \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n+1$ konvergiert. Die Grenzwerte bezeichnen wir mit $\tilde{x}^i$ und $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Damit ist $\tilde{x}^i \in M$, $\tilde{\alpha}_i \in [0,1]$ mit $\tilde{\alpha}_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+1} = 1$ und $y = \tilde{\alpha}_1 \tilde{x}^1 + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+1} \tilde{x}^{n+1}$. Also gilt $y \in \operatorname{conv} M$.