Musterlösungen zum 3. Übungsblatt
Optimierungstheorie SS09

10. Aufgabe

(a)
$$
\begin{aligned}
& Ax = 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0 \text{ lösbar} \\
\iff\quad & \begin{pmatrix} -A \\ \hline 1 \dots 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix},\ x \geq 0 \text{ lösbar} \\
\iff\quad & \left(\begin{array}{c|c} -A^T & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right) u \geq 0,\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}, u \rangle < 0 \text{ unlösbar} \qquad \text{(L. v. Farkas)} \\
\iff\quad & A^T \widetilde{u} \leq \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \text{ für alle } t < 0 \text{ unlösbar} \qquad \left(u = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \hline t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}\right) \\
\iff\quad & A^T \widetilde{u} < 0 \text{ unlösbar.}
\end{aligned}
$$

(b) Sei $A = \left(\begin{array}{c|c|c} a^1 & \cdots & a^n \end{array} \right)$.

$$
\begin{aligned}
& A^T u \leq 0,\ A^T u \neq 0 \text{ unlösbar} \\
\iff\quad & A^T u \leq 0 \text{ und } \left[(\langle a^1, u \rangle < 0) \text{ oder } \dots \text{ oder } (\langle a^n, u \rangle < 0) \right] \text{ unlösbar} \\
\iff\quad & \text{Keines der Systeme } \boxed{\begin{array}{rcl} (-A)^T u & \geq & 0 \\ \langle a^1, u \rangle & < & 0 \end{array}} \cdots \boxed{\begin{array}{rcl} (-A)^T u & \geq & 0 \\ \langle a^n, u \rangle & < & 0 \end{array}} \\
& \text{ist lösbar} \\
\iff\quad & \text{Jedes der Systeme } \boxed{\begin{array}{rcl} (-A)x & = & a^1 \\ x & \geq & 0 \end{array}} \cdots \boxed{\begin{array}{rcl} (-A)x & = & a^n \\ x & \geq & 0 \end{array}} \\
& \text{ist lösbar} \qquad \text{(Farkas)} \\
\iff^{(*)}\quad & Ax = 0, x > 0 \text{ ist lösbar}
\end{aligned}
$$

Beweis von $(*)$:

"$\Rightarrow$" Es existieren Lösungen x^j mit $(-A)x^j = a^j,\ x^j \geq 0$. Setze

$$
x := x^1 + \dots + x^n + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} > 0.
$$

Dann ist $Ax = -a^1 - a^2 - \dots - a^n + a^1 + \dots + a^n = 0$.

"$\Leftarrow$" Ist $x > 0$ eine Lösung von $Ax = 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
& 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i a^i \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} a^i = -a^j \\
\Rightarrow \quad & x^j := \left(\frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 0, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right) \geq 0 \text{ ist Lsg. von } Ax = -a^j
\end{aligned}
$$

11. Aufgabe

V ist endlich erzeugt $\Rightarrow \exists\, y^1, \ldots, y^k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$V = \{\alpha_1 y^1 + \ldots + \alpha_k y^k \mid \alpha_i \geq 0\}.$$

(b) Es sei $A := \big(y^1 | \cdots | y^k\big)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Sei } b \in V^{\circ\circ} \quad & \Longleftrightarrow \quad \langle b, z \rangle \leq 0 \qquad \forall\, z \in V^\circ \\
& \Longleftrightarrow \quad \big[\langle z, y^i \rangle \ \leq\ 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, k \Rightarrow \langle b, z \rangle \ \leq\ 0\big] \\
& \Longleftrightarrow \quad \big[A^T u \ \geq\ 0 \Rightarrow \langle b, u \rangle \ \geq\ 0\big] \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{ mit } u := -z) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists x \geq 0,\ x = (x_1, \ldots, x_k),\ \text{mit } Ax = b \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{Lemma von Farkas}) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists x_1, \ldots, x_k \geq 0 \text{ mit } b = x_1 y^1 + \ldots + x_k y^k \\
& \Longleftrightarrow \quad b \in V.
\end{aligned}
$$