Musterlösungen zum 5. Übungsblatt
Optimierungstheorie SS09

17. Aufgabe

Bemerkung: Wir verwenden den Dualitätssatz, für Programme PP und DP wie sie in Aufgabe 14 fomuliert sind, um eine Wiederholung der dort ausgeführten Argumente zu vermeiden.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

$$M := \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) := \langle 0, x\rangle & = & \max \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}} \text{ ist lösbar mit Maximalwert } 0$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{rcl} \langle b, v\rangle & = & \min \\ A^T v & \geq & 0 \end{array}} \text{ ist lösbar mit Minimalwert 0 (Dualitätssatz, Aufg. 14)}$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{rcl} \langle b, v\rangle & = & \min \\ A^T v & \geq & 0 \end{array}} \text{ wird durch } v = 0 \text{ gelöst}$$

$$\iff \big[\forall v \in \mathbb{R}^m :\ A^T v \geq 0 \Rightarrow \langle b, v\rangle \geq \langle b, 0\rangle = 0\big]$$

19. Aufgabe

(a) Sei $x = (x_1, \ldots, x_6)$ mit $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.
Untersuche die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert $(3, 1, 4)$ als einzige Lösung dieses LGS. Also ist $x^0 = (3, 1, 4, 0, 0, 0) \in M$ und weil die Spalten $a^1,\ a^2,\ a^3$ l.u. sind, ist $x^0 \in \operatorname{vert} M$.

(b) Sei $x = (x_1, \ldots, x_6)$ mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Untersuche die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert $(-5, 2, 1)$ als einzige Lösung dieses LGS. Also ist die einzige Lösung von $Ax = b$ mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ der Vektor $(0, 0, 0, -5, 2, 1) \notin M$
$\Rightarrow$ Es ex. keine zulässigen Punkte mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.