Lösungen zum 6. Übungsblatt
Optimierungstheorie SS09

24. Aufgabe

(a) Wie in Aufg. 20 (a) zeigt man: (x, y) Ecke von $M' \;\Rightarrow\; x$ Ecke von M.

Bestimmung einer Ecke von M': Sei o.B.d.A. $b_1 = \max_{i=1}^m b_i$.

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & \cdots & x_n & y_1 & & \cdots & y_m & \\
\hline
a_{11} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
\vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_{m-1} \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & -1 & b_m
\end{array}
\sim
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & \cdots & x_n & y_1 & y_2 & \cdots & \cdots & y_m & \\
\hline
a_{11} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
a_{11}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{2n} & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1-b_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b_1-b_{m-1} \\
a_{11}-a_{m1} & \cdots & a_{1n}-a_{mn} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_1-b_m
\end{array}
$$

Das neue Tableau entsteht durch Addition der 1. Zeile zum Negativen der i-ten Zeile ($i = 2, \ldots, m$). Die neue rechte Seite ist wieder ≥ 0.

Bestimme also eine Lösungsecke von (LP), gegeben durch

$$
\boxed{
\begin{array}{c}
g(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z) := z = \min \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}-a_{m1} & \cdots & a_{1n}-a_{mn} \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1-b_2 \\ \vdots \\ b_1-b_m \end{pmatrix} \\
x, y, z \geq 0
\end{array}
}
$$

ausgehend von der Ecke $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\times}, 0, \underbrace{b_1-b_2, \ldots, b_1-b_m}_{\text{zu } y_2,\ldots,y_m}, b_1)$. (LP) ist immer lösbar, da der zulässige Bereich nichtleer ist und $g \geq 0$ gilt.

1. Fall: $g_{\min} > 0 \;\Rightarrow M' = \emptyset \Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow M$ hat keine Ecken.

2. Fall: $g_{\min} = 0$ mit Lösungsecke $(x, y, 0)$
   $\Rightarrow (x, y)$ ist Ecke von M' (Satz 3.2)
   $\Rightarrow x$ ist Ecke von M.

(b) Zuerst dividiert man die 3. Ungleichung durch 2. Damit erhält man:

Tableau für M':

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
2	1	1	-1			4
1	2	1		-1		5
3	2	2			-1	6

$\longrightarrow$

Umgeformt nach (a)

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z	
1	1	1	1	0	-1	0	2
2	0	1	0	1	-1	0	1
3	2	2	0	0	-1	1	6

Startecke ist $(0,0,0,2,1,0,6)$:

				$\downarrow$			
y_1	y_2	z	x_1	x_2	x_3	y_3	
1	0	0	1	**1**	1	-1	2
0	1	0	2	0	1	-1	1
0	0	1	3	2	2	-1	6
0	0	0	-3	-2	-2	1	-6

$\longrightarrow$

						$\downarrow$	
y_1	y_2	z	x_1	x_2	x_3	y_3	
1	0	0	1	1	1	-1	2
0	1	0	2	0	1	-1	1
-2	0	1	1	0	0	**1**	2
2	0	0	-1	0	0	-1	-2

y_1	y_2	z	x_1	x_2	x_3	y_3	
-1	0	1	2	1	1	0	4
-2	1	1	3	0	1	0	3
-2	0	1	1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	0	0	0

$\Rightarrow \quad (\overbrace{0,4,0}^{x},\overbrace{0,3,2}^{y},0)$ ist Ecke von (LP)

$\Rightarrow (0,4,0,0,3,2) \in \operatorname{vert} M' \Rightarrow (0,4,0) \in \operatorname{vert} M$.