Lösungen zum 9. Übungsblatt Optimierungstheorie SS 09

34. Aufgabe

1) Erhöhe die Einträge der Auszahlungsmatrix um 3. Damit ist sichergestellt, dass das daraus resultierende Spiel einen positiven Wert hat. Das neue Spiel mit der Auszahlungsmatrix

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

hat die gleichen optimalen Strategien.

2) Suche eine optimale Strategie für Spieler P_1:

$$(\overline{P}_1) \quad \boxed{\begin{array}{c} f(x) = x_1 + x_2 + x_3 = \max \\ \tilde{C}x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0 \end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad (P_1) \quad \boxed{\begin{array}{c} -f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 = \min \\ z + \tilde{C}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, z \geq 0 \end{array}}$$

Simplex-Tableau mit Startecke $(z, x) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$:

z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	4	2	1	1
0	1	0	2	4	4	1
0	0	1	**5**	2	1	1
0	0	0	-1	-1	-1	0

z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	
1	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{16}{5}$	$\mathbf{\frac{18}{5}}$	$\frac{3}{5}$
0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	
1	$*$	$*$	0	$*$	0	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{8}{9}$	1	$\frac{1}{6}$
0	$*$	$*$	1	$*$	0	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Eine Lösung von $(\overline{P}_1)$ ist $x' = (1/6, 0, 1/6)$ mit Zielfunktionswert $f(x') = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ der Wert des Spiels $\tilde{C}$ ist 3

$\Rightarrow$ der Wert des ursprünglichen Spiels ist $3 - 3 = 0$, das **Spiel ist fair**. Eine **optimale Strategie für** P_1 ist

$$x = \frac{1}{f(x')} \cdot x' = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^\top.$$

Die Komplementaritätsbedingungen liefern für die Lösung des dualen Programms $y' = (0, \frac{2}{9}, \frac{1}{9})$. Also: eine **optimale Strategie für** P_2 ist

$$y = \frac{1}{f(x')} \cdot y' = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^\top.$$

36. Aufgabe

Spalte B ist größer als Spalte C, wir können wg. Aufg. 35 (b) also B streichen. Die neue 4. Zeile ist kleiner als die 2. Zeile, wg. Aufg. 35 (a), streichen wir die 4. Zeile. Die neue Auszahlungsmatrix lautet

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: (3. Zeile)= 3/7∗(1. Zeile)+4/7∗(2.Zeile). Wir können also die 3. Zeile streichen. Wir addieren 3 und erhalten $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$. Das (LP) für Spieler P_1 (=Schicksal) ist

$$(P_1) \qquad \boxed{\begin{array}{c} -f(x) = -x_1 - x_2 = \min \\ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 8x_2 & \leq & 1 \\ 11x_1 + x_2 & \leq & 1 \end{array} \\ x \geq 0. \end{array}}$$

Wir suchen eine Lösung mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & \\ \hline 4 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{11} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & \\ \hline 0 & \mathbf{84/11} & 1 & -4/11 & 7/11 \\ 1 & 1/11 & 0 & 1/11 & 1/11 \\ \hline 0 & -10/11 & 0 & 1/11 & 1/11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & z_1 & z_2 & \\ \hline 0 & 1 & * & * & 1/12 \\ 1 & 0 & * & * & 1/12 \\ \hline 0 & 0 & 5/42 & 1/21 & 1/6 \end{array}$$

⇒ Lösung von (P_1) ist $x' = (1/12, 1/12)$, $f(x') = 1/6$.
Lösung des zugeh. dualen Programms (P_2) ist $y' = (5/42, 1/21)$.
Das reduzierte Spiel hat also den Wert $w = \frac{1}{f(x')} - 3 = 3$.

Optimale Strategien für
das Schicksal: $\tilde{x}^0 = \frac{1}{f(x')}x' = (1/2, 1/2)$
den Geldanleger: $\tilde{y}^0 = \frac{1}{f(x')}y' = (5/7, 2/7)$.

⇒ (Aufg. 35) Das ursprüngl. Spiel hat den Wert 3 und optimal für
das Schicksal P_1 ist $x^0 = (1/2, 0, 1/2)$
den Geldanleger P_2 ist $y^0 = (5/7, 2/7, 0, 0)$.