# Lösungen zum 10. Übungsblatt Optimierungstheorie SS 09

### 37. Aufgabe

Es bezeichne $(i)$ die Strategie „$i$ Mann gehen über den Strand, der Rest über das Hinkelsteinfeld".

| Römer \ Gallier | $(0)$ | $(1)$ | $\ldots$ | $(n)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0)$ | $1$ | $0$ | $\cdots$ | $0$ |
| $(1)$ | $1$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $\vdots$ | $0$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $0$ |
| $(n)$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\ddots$ | $1$ |
| $(n+1)$ | $0$ | $\cdots$ | $0$ | $1$ |

Die Auszahlungsmatrix $C$ ist eine Bandmatrix. Der Wert des Spiels $(n \geq 1)$ ist positiv:
Sei $(y^0, x^0)$ Sattelpunkt $\Rightarrow$

$$\Phi(y, x^0) \leq \underbrace{\Phi(y^0, x^0)}_{= \langle y, Cx^0 \rangle} = w \qquad \forall \text{Strategien } y \text{ der Römer}$$

Wegen $\sum_{i=0}^{n} x_i^0 = 1$ und $x^0 \geq 0$ ex. eine positive Komponente $(Cx^0)_{i_0}$ des Vektors

$$Cx^0 = \begin{pmatrix} x_0^0 \\ x_0^0 + x_1^0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^0 + x_n^0 \\ x_n^0 \end{pmatrix},$$

also ist $0 < (Cx^0)_{i_0} = \langle e^{i_0}, Cx^0 \rangle \leq w$.
$\Rightarrow$ Die lin. Programme zur Lösung des Spiels sind anwendbar:

Für die Gallier

$$(DP) \qquad \boxed{\begin{array}{c} g(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j = \max \\ \begin{array}{ccc} x_0 & \leq & 1 \\ x_0 + x_1 & \leq & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} + x_n & \leq & 1 \\ x_n & \leq & 1 \end{array} \\ x_j \geq 0 \end{array}}$$

Für die Römer

$$(PP) \qquad \boxed{\begin{array}{c} f(y) = \sum_{i=0}^{n+1} y_i = \min \\ \begin{array}{ccc} y_1 + y_2 & \geq & 1 \\ y_2 + y_3 & \geq & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_n + y_{n+1} & \geq & 1 \end{array} \\ y_i \geq 0 \end{array}}$$

Die Summe aller Nebenbed. in (DP) ergibt $2g(x) \leq n+2$, also

$$g(x) \leq \frac{n+2}{2}$$

**1. Fall: $n$ gerade**

Um $g(x)$ zu maximieren, versuchen wir $g(x') = \frac{n+2}{2}$ mit einem zulässigen $x'$ zu erreichen. Dazu setzen wir sinnvollerweise $x'_0 := 1$.

$\overset{\text{NB}, g_{\max}}{\Rightarrow} \quad x' = (1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 1)$

Dieser Punkt ist zulässig und optimal, also ist

$$x^0 = \frac{1}{g(x')}x' = (\frac{2}{n+2}, 0, \frac{2}{n+2}, \ldots, 0, \frac{2}{n+2})$$

optimale Strategie für die Gallier und der Wert des Spiels ist

$$w_n = \frac{1}{g(x')} = \frac{2}{n+2}.$$

Wir setzen $y' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$. $y'$ ist zulässig in (PP) und wegen $f(y') = g(x')$ optimal.

$\Rightarrow y^0 := (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{n+2})$ ist optimale Strategie für die Römer.

**2. Fall: $n$ ungerade**

Addiert man jede 2. NB in (DP), erhält man

$$g(x) = (x_0 + x_1) + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{n-1} + x_n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Setze $x' = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ (zulässig)

$\Rightarrow g(x') = \frac{n+1}{2}$, also $x'$ Lösung von (DP)

$\Rightarrow x^0 = \frac{1}{g(x')}x' = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ ist optimale Strategie für die Gallier

und der Wert des Spiels ist $w_n = \frac{1}{g(x')} = \frac{2}{n+1}$. Aus den Komplementaritätsbed. erhalten wir:

$$y' = (0, 1, 0, 1, \ldots, 1, 0)$$

ist Lösung von (PP) $\Rightarrow y^0 = (0, \frac{2}{n+1}, 0, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{2}{n+1}, 0)$ ist optimal für die Römer.

Für den Wert $w_n$ gilt:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_n$ | 1 | 1/2 | 1/2 | 1/3 | 1/3 ... |

Die Gallier haben bessere Gewinnchancen im Fall $n > 3$.