Lösungen zum 11. Übungsblatt Optimierungstheorie SS 09

42. Aufgabe

Seien x^0 eine Lösung und x ein zulässiger Punkt von (KP). Zu zeigen ist:

$$x \text{ ist Lösung von (KP)} \iff \begin{cases} (i) & \nabla f(x) = \nabla f(x^0) \\ (ii) & \langle x - x^0, \nabla f(x^0) \rangle = 0 \end{cases}$$

„$\Rightarrow$“: Sei $\alpha \in [0,1]$. Optimalität von x^0, Konvexität von $f, f(x) = f(x^0) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x^0) &\leq f(\alpha x + (1-\alpha)x^0) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x^0) \\ &= \alpha f(x^0) + (1-\alpha) f(x^0) = f(x^0), \end{aligned}$$

also ist

$$f(x^0 + \alpha(x - x^0)) = f(\alpha x + (1-\alpha)x^0) = f(x^0), \qquad \text{für alle } \alpha \in [0,1].$$

$$\Rightarrow \langle x - x^0, \nabla f(x^0) \rangle = f'(x^0, x - x^0) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{f(x^0 + \alpha(x - x^0)) - f(x^0)}{\alpha} = 0.$$

Dies zeigt (ii). Zum Beweis von (i) betrachten wir die Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad y \mapsto f(y) - \langle y - x^0, \nabla f(x^0) \rangle.$$

Wegen (ii) ist $h(x) = f(x) = f(x^0) = h(x^0)$. Außerdem ist h konvex, stetig diff.bar und $\nabla h(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x^0)$.

Annahme: $w := \nabla h(x) \neq 0$
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto g(\lambda) := h(x + \lambda w)$; wir betrachten also im Wesentlichen h eingeschränkt auf die Gerade durch x und $x + w$.

$$g'(\lambda) = \langle w, \nabla h(x + \lambda w) \rangle, \qquad g'(0) = \|\nabla h(x)\|^2 > 0.$$

Wegen der Stetigkeit von g' ex. ein $\delta > 0$ mit $g' > 0$ auf $[-\delta, \delta]$, d.h. g ist streng monoton wachsend auf $[-\delta, \delta]$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && g(0) > g(-\delta) \\ &\Rightarrow && h(x) > h(x - \delta w) = f(x - \delta w) - \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \\ &\overset{h(x)=f(x^0)}{\Rightarrow} && f(x - \delta w) - f(x^0) < \langle (x - \delta w) - x^0, \nabla f(x^0) \rangle \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Konvexität von f! Also muss $\nabla h(x) = 0$ sein.

„$\Leftarrow$“: Wegen der Konvexität von f gilt

$$f(x^0) - f(x) \geq \langle x^0 - x, \nabla f(x) \rangle \overset{(i)}{=} \langle x^0 - x, \nabla f(x^0) \rangle \overset{(ii)}{=} 0$$

Also $f(x^0) \geq f(x)$ und, weil x^0 Lösung ist, $f(x^0) = f(x)$.